

CAPITOLO 7

Motore trifase a induzione**7.1 - Struttura e principio di funzionamento**

I *motori a induzione*, o *asincroni*, trifase costituiscono una delle categorie di motori in corrente alternata fra le più diffuse nelle applicazioni industriali, a velocità fissa e variabile. La *conversione elettromeccanica* che essi attuano segue il principio di funzionamento dei *sistemi a induzione* mediante una diretta applicazione del *campo magnetico rotante*.

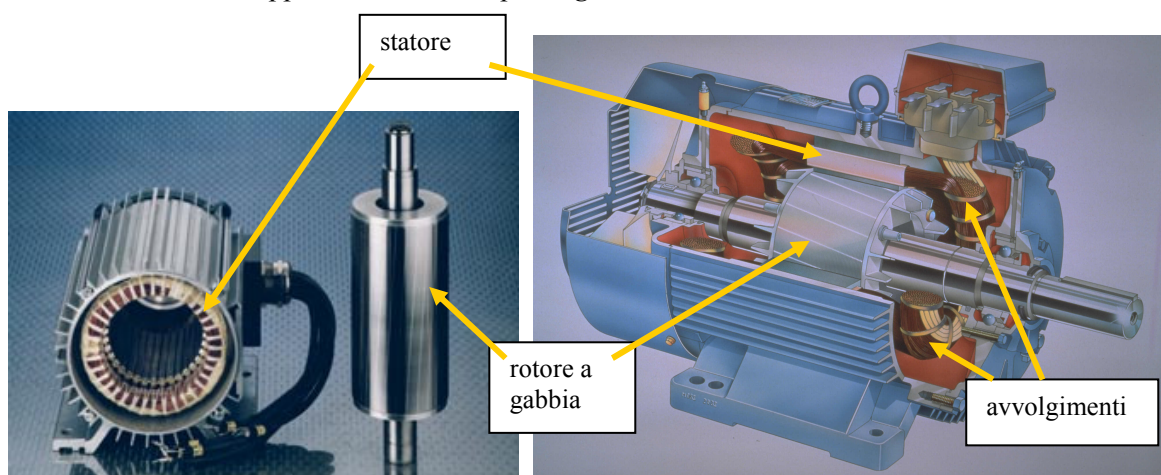


Fig. 7.1.1 - (a) Motore asincrono disassemblato (b) Spaccato di un motore asincrono

Un motore asincrono disassemblato e uno spaccato sono mostrati in Fig. 7.1.1. Esso comprende uno *statore* (*parte fissa*) e un *rotore* (*parte mobile*) entrambi a forma di corona cilindrica di materiale ferromagnetico laminato e separati da un *traferro* in aria. Sulle superfici cilindriche di statore e rotore che si affacciano al traferro sono ricavate, secondo la direzione delle generatrici, le *cave* di statore e di rotore destinate a contenere l'*avvolgimento statorico* e *rotorico* rispettivamente (nella Fig.7.1.1 il rotore non è di tipo avvolto; v. Fig. 7.1.2).

L'avvolgimento di statore, del tutto simile a quello di un motore brushless sinusoidale, è costituito da tre *fasi* identiche come numero di spire e distribuzione delle spire, ma spazialmente sfasate in modo uguale lungo il traferro. Esso sarà descritto più avanti. Le fasi fanno capo alla morsettiera del motore attraverso la quale esso può essere alimentato da una sorgente trifase esterna.

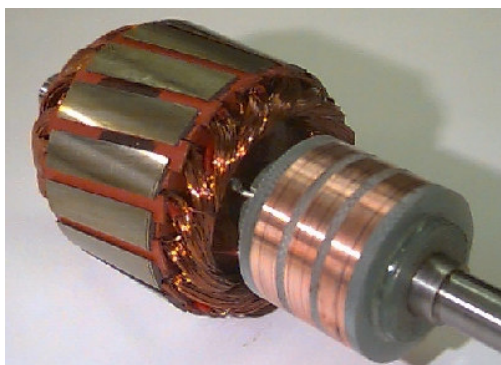


Fig. 7.1.2 Rotore avvolto di motore asincrono

Il circuito di rotore può essere realizzato con un avvolgimento trifase distribuito, del tutto analogo a quello di statore (*rotore avvolto o ad anelli*), i cui terminali fanno capo a tre anelli su cui strisciano tre spazzole che consentono il collegamento dell'avvolgimento rotorico ad un circuito esterno, Fig. 7.1.2. Quest'ultimo può essere anche un convertitore statico che gestisce il flusso di potenza entrante o uscente dal rotore per ottenere particolari azionamenti denominati *Kramer statico*, *Scherbius* o *slip-recovery*.

spesso, comunque, il circuito di rotore è

realizzato mediante un insieme di sbarre di alluminio (una per ogni cava) fra loro tutte collegate alle due estremità da due anelli, così a realizzare una struttura comunemente denominata *rotore a gabbia* (Fig. 7.1.1). Tale struttura, sottoposta all'azione del campo magnetico prodotto dall'avvolgimento statorico, si comporta come un avvolgimento trifase dello stesso tipo e con lo stesso *numero di poli* di quello di statore.

Prima di descrivere il funzionamento del motore e ricavarne le principali equazioni, si anticipa un breve richiamo sul campo magnetico rotante.

7.2 - Richiami sul campo magnetico rotante per un motore asincrono

Una rappresentazione schematica della struttura di un motore asincrono *a due poli* è mostrata in Fig. 7.1.3 (a). Ciascuna fase statorica è rappresentata con una singola spira. Le tre fasi sono spazialmente disposte lungo il traferro con una sfasamento reciproco di 120° . Il rotore a rappresentato del tipo a gabbia.

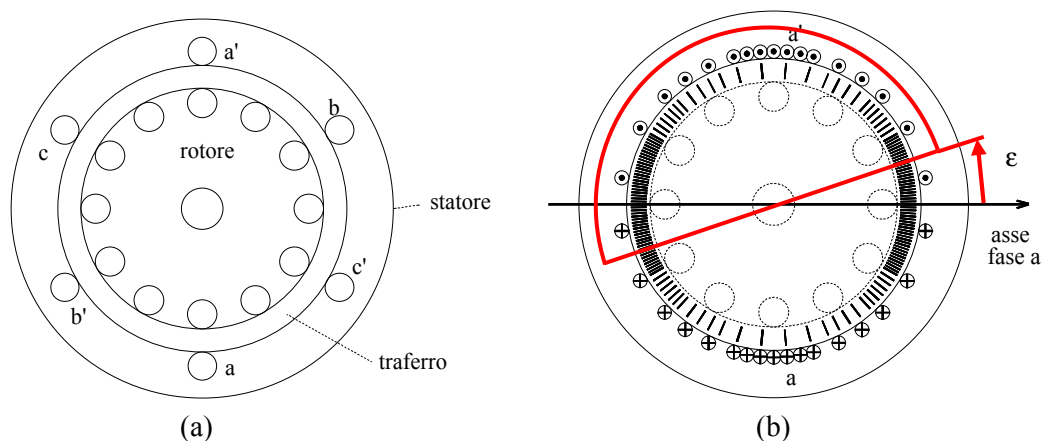


Fig.7.1.3 - (a) - Rappresentazione schematica di un motore ad induzione
(b) - Particolare dell'avvolgimento della fase *a* (avvolgimento a 2 poli)

Si supponga per esempio di alimentare la fase *a* con una corrente i_a positiva entrante nel lato *a* della fase e uscente dal lato *a'*, mentre nessun'altra corrente è presente nel motore. Assumendo una distribuzione sinusoidale dei conduttori dell'avvolgimento di ciascuna fase (schematicamente mostrata in Fig. 7.1.3 (b) che approssima la situazione reale) si ottiene una distribuzione sinusoidale di tensione magnetica al traferro $A_a = H_a g$ ove H_a è il campo magnetico al traferro supposto radiale mentre g è lo spessore del traferro. La Fig. 7.1.3 (b) riporta le linee del campo magnetico H_a al traferro nel generico istante considerato (linee più fitte indicano le zone con campo magnetico più intenso). Si riconosce che il campo magnetico presenta due poli (una coppia (paia) di poli: $p=1$) a giustificazione della denominazione di "motore a 2 poli" sopra usata. Nei motori a 2, 3, ... p coppie (paia) di poli, la distribuzione di campo al traferro di Fig. 7.1.3 (b) si sviluppa e si ripete ogni $1/2$, $1/3$, $1/p$ -esimo di giro. Ciò si ottiene con avvolgimenti multipolari le cui spire per ciascuna fase hanno $2p$ gruppi di lati percorsi da correnti di segno contrario e distanziati reciprocamente di π/p radianti. Nel caso di macchine multipolari una posizione angolare al traferro e la sua velocità di rotazione possono essere espresse in radianti geometrici o meccanici (rad) per la posizione e si e in radianti al secondo (rad/s) per la velocità angolare, oppure in radianti meccanici-elettrici o semplicemente radianti elettrici (rad el.) e per la velocità in radianti elettrici al secondo (rad el./s). Nel primo caso si fa riferimento alla figura geometrica della macchina; nel secondo alla ciclicità del campo elettromagnetico al traferro che si ripete p volte nel giro e al quale si assegna una estensione di 2π radianti ad ogni ciclo. Dette per esempio ϑ_m e ω_m la posizione e la velocità

angolare del motore in rad e rad/s rispettivamente i loro valori ϑ_{me} e ω_{me} in rad el. e rad el./s risultano

$$\vartheta_{me} = p \vartheta_m \quad e \quad \omega_{me} = p \omega_m \quad (7.2.1)$$

La derivazione dell'intensità del campo magnetico al traferro è abbastanza semplice se si suppone infinita la permeabilità magnetica del ferro. Per il calcolo della tensione magnetica al traferro si può applicare il teorema della circuitazione scegliendo per comodità come percorso d'integrazione una semicirconferenza, concentrica con il motore, genericamente disposta con il suo diametro¹ nella posizione definita dalla coordinata angolare ε espressa in radianti elettrici; nella Fig. 7.1.3 (b) ε coincide con la posizione geometrica espressa in radianti perché nell'esempio il motore ha una sola coppia polare e la semicirconferenza è supposta percorsa in senso antiorario. A parte gli attraversamenti del traferro, la circonferenza scelta come percorso di integrazione si sviluppa nel ferro di rotore e di statore, ove la caduta di tensione magnetica può considerarsi trascurabile (ipotesi di $\mu=\infty$ nel ferro). Le amperspire $n_c(\varepsilon)i_a$ concatenate dal percorso dalla semicirconferenza ad ogni posizione angolare ε (n_c è il numero totale di conduttori dell'avvolgimento della fase a abbracciati dal percorso di integrazione quando esso è nella posizione ε , conteggiati con segno positivo se orientati con verso uscente dalla figura, con segno negativo se con verso entrante) sono legate direttamente alla tensione magnetica al traferro dall'espressione (i ricordi che i traferri attraversati sono due)

$$A_a(t, \varepsilon) = \frac{n_c(\varepsilon)i_a(t)}{2} \quad (7.2.2)$$

In virtù della distribuzione sinusoidale dell'avvolgimento, $n_c(\varepsilon)$ è massimo positivo per $\varepsilon=0$ e pari al numero di spire N della fase a (e di ciascuna fase), nullo per $\varepsilon=\pi/2$ e, in definitiva, segue la legge:

$$n_c(\varepsilon) = N \cos(\varepsilon) \quad (7.2.3)$$

Assumendo ora che all'istante t l'avvolgimento di statore sia alimentato dalla generica terna di correnti $i_a(t)$, $i_b(t)$, $i_c(t)$ si può dunque scrivere²

$$\begin{aligned} A_a(t, \varepsilon) &= N i_a(t) \cos(\varepsilon) \\ A_b(t, \varepsilon) &= N i_b(t) \cos(\varepsilon - 2\pi/3) = N i_b(t) \left(-\frac{1}{2} \cos(\varepsilon) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\varepsilon) \right) \\ A_c(t, \varepsilon) &= N i_c(t) \cos(\varepsilon - 4\pi/3) = N i_c(t) \left(-\frac{1}{2} \cos(\varepsilon) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\varepsilon) \right) \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

La tensione magnetica al traferro, ad opera delle correnti statoriche, si ottiene sommando punto per punto ed istante per istante le tre distribuzioni indicate dalla (7.2.4)³. Si ottiene:

¹ Nel caso di macchine multipolari per diametro si intende la spezzata congiungente due punti spazati π rad el. e passante per il centro.

² Si ricordi che $\cos(\varepsilon-2\pi/3)=-1/2 \cos\varepsilon + \sqrt{3}/2 \sin\varepsilon$ e $\cos(\varepsilon-4\pi/3)=-1/2 \cos\varepsilon - \sqrt{3}/2 \sin\varepsilon$.

³ L'ipotesi di permeabilità magnetica infinita del ferro assicura la linearità del sistema e quindi la possibilità di applicare il principio della sovrapposizione degli effetti.

$$A_{abc}(t, \varepsilon) = N \left(i_a - \frac{1}{2} i_b - \frac{1}{2} i_c \right) \cos(\varepsilon) + N \left(\frac{\sqrt{3}}{2} i_b - \frac{\sqrt{3}}{2} i_c \right) \sin(\varepsilon) = \frac{3}{2} N i_\alpha \cos(\varepsilon) + \frac{3}{2} N i_\beta \sin(\varepsilon) \quad (7.2.5)$$

dove si è omessa per semplicità la dipendenza delle correnti dal tempo, e $i_\alpha(t)$ e $i_\beta(t)$ sono rispettivamente la componente reale ed immaginaria del vettore spaziale di corrente $\mathbf{i}(t)$ associato alla terna $i_a(t)$, $i_b(t)$, $i_c(t)$.

- Dalla (7.2.5) si può osservare che la distribuzione della tensione magnetica al traferro è considerabile come la somma di due termini, che potrebbero essere forniti da due soli avvolgimenti, aventi ciascuno $3/2 N$ spire (se N è il numero di spire di una delle fasi attuali) e con gli assi tra loro ortogonali, in modo da produrre la massima tensione magnetica rispettivamente per $\varepsilon=0$ (avvolgimento distribuito come la fase a) e per $\varepsilon=\pi/2$ rad.el. (avvolgimento con asse in posizione $\pi/2$ rad.el.).
- Si può notare anche che una eventuale componente omopolare della terna di correnti di fase non partecipa alla creazione della tensione magnetica A_{abc} , come si può ricavare in modo diretto dalla (7.2.5).

Riprendendo la definizione di vettore spaziale della corrente si ha:

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta}(t) = i_\alpha(t) + j i_\beta(t) = |\mathbf{i}_{\alpha\beta}(t)| e^{j\vartheta_i(t)} = |\mathbf{i}_{\alpha\beta}(t)| [\cos\vartheta_i(t) + j \sin\vartheta_i(t)] \quad (7.2.6)$$

dove ϑ_i è l'argomento (sempre espressa in rad.el.) del vettore spaziale della corrente riferita all'asse reale del piano complesso, che coincide come si è detto con l'asse della fase a . Sostituendo la (7.2.6) nella (7.2.5) si ottiene:

$$A_{abc}(t, \varepsilon) = \frac{3}{2} N |\mathbf{i}_{\alpha\beta}(t)| \cos(\varepsilon - \vartheta_i(t)) \quad (7.2.7)$$

L'espressione appena ricavata consente di attribuire un significato fisico al vettore spaziale della corrente; in particolare, esso indica con il suo argomento la direzione ove in ogni istante è massima la tensione magnetica al traferro creata dall'avvolgimento statorico, misurata a partire dall'asse della fase a , e il suo modulo è proporzionale a tale valore massimo.

In presenza di tensione magnetica al traferro si viene a manifestare un campo magnetico di intensità $H=A/g$ e quindi un'induzione magnetica $B=\mu_0 H=\mu_0 A/g$. Se la macchina è isotropa, ovvero g è costante con ε^4 (com'è per il motore a induzione), l'espressione della distribuzione dell'induzione al traferro si ricava facilmente dalla (7.2.7) e vale

$$B_{abc}(t, \varepsilon) = \frac{3}{2} k |\mathbf{i}_{\alpha\beta}(t)| \cos(\varepsilon - \vartheta_i(t)) \quad (7.2.8)$$

⁴ Più precisamente la macchina è isotropa quando le caratteristiche magnetiche incontrate dalla linea di integrazione di Fig. 2 (per esempio la permeanza infinitesima presentata da un immaginario circuito magnetico di sezione infinitesima e il cui asse sia la linea di integrazione) sono indipendenti da ε .

dove la costante k tiene conto delle dimensioni del traferro e del numero di spire dell'avvolgimento⁵. Nelle macchine isotrope le distribuzioni al traferro della tensione magnetica e dell'induzione magnetica si possono confondere. Questo è il caso delle macchine ad induzione in esame.

Facendo riferimento all'induzione magnetica, nel funzionamento a regime il motore viene alimentato con una terna di correnti sinusoidali sfasate reciprocamente di $2\pi/3$ rad.el. e di pulsazione $\omega_s=2\pi f$ (comune a tutte le grandezze statoriche). Il vettore spaziale associato ha ampiezza costante e ruota con velocità angolare costante $\omega_i = d\vartheta_i/dt$, pari alla pulsazione delle correnti di fase (v. capitolo sui vettori spaziali); assumendo che nell'istante iniziale il vettore spaziale sia posizionato sull'asse della fase a , cioè $\vartheta_i(0)=0$, la (7.2.8) si semplifica nella seguente:

$$B_{abc}(t, \varepsilon) = \frac{3}{2} k |i_{\alpha\beta}| \cos(\omega_s t - \varepsilon) = B_M \cos(\omega_s t - \varepsilon) \quad (7.2.9)$$

All'istante iniziale $t=0$ essa rappresenta una distribuzione sinusoidale dell'induzione al traferro, con il suo valore massimo in corrispondenza dell'asse della fase a ($\varepsilon=0$); negli istanti successivi tale massimo ruota (e con esso ovviamente tutta la distribuzione spaziale di B_{abc}), dando luogo a quello che viene comunemente indicato come campo magnetico rotante, studiato per la prima volta da Galileo Ferraris nel 1885. La posizione del massimo di B_{abc} è data da $\varepsilon=\omega_s t$ [rad el.] e quindi la velocità di rotazione del campo rotante in regime sinusoidale è data da

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \omega_s \quad [\text{rad el./s}] \quad (7.2.10)$$

che in rad/s diventa

$$\omega_o = \frac{\omega_s}{p} \quad [\text{rad./s}] \quad (7.2.11)$$

se p è il numero di paia di poli. All'atto pratico la velocità del campo rotante è spesso espressa in giri al minuto attraverso la:

$$n_o = \frac{60\omega_o}{2\pi} = \frac{60f_s}{p} \quad (7.2.12)$$

essendo f_s la frequenza statorica.

7.3 – Comportamento del motore a induzione in regime sinusoidale

Prima di affrontare la trattazione generale del motore ad induzione a partire dalla sua modellazione dinamica per arrivare agli algoritmi di controllo, si descrivono brevemente alcune caratteristiche peculiari del comportamento a regime che servono per riconoscere gli aspetti essenziali e distintivi del comportamento di questa macchina elettrica

⁵ Se il rotore fosse invece anisotropo, l'andamento dell'induzione al traferro ad opera delle sole correnti statoriche dipenderebbe anche dalla posizione ϑ_m del rotore e non sarebbe spazialmente in fase con quello della tensione magnetica.

7.3.1 – Tensioni e correnti in regime sinusoidale - Si consideri dapprima il caso di un motore ad induzione con rotore avvolto trifase e si supponga che l'avvolgimento rotorico (avente lo stesso numero di poli di quello statorico) sia aperto cosicché ogni corrente rotorica sia nulla. Se gli avvolgimenti statorici sono alimentati da un sistema trifase equilibrato di correnti a pulsazione ω_s , si produce nel traferro, come si è visto, un campo magnetico rotante a velocità ω_o data dalla (7.2.11). Ogni fase di statore concatena pertanto un flusso magnetico $\lambda(t)$ alternato a pulsazione ω_s . La tensione ai morsetti dovrà bilanciare la caduta di tensione resistiva (a pulsazione ω_s) e la forza contro elettromotrice $d\lambda(t)/dt$, pure a pulsazione ω_s , indotta dalle variazioni del flusso concatenato.

Si immagini che il rotore stia ruotando ad una velocità $0 < \omega_m < \omega_o$, nel verso del campo rotante. Quest'ultimo gira pertanto rispetto a rotore con velocità $\omega_o - \omega_m$, pari anche a $s\omega_o$, se si definisce lo *scorrimento* s come:

$$s = \frac{\omega_o - \omega_m}{\omega_o} = \frac{n_o - n}{n_o} = \frac{\omega_s - \omega_{me}}{\omega_s} \quad (7.3.1)$$

Gli avvolgimenti aperti di rotore sono quindi sede di una terna simmetrica di tensioni indotte alternate la cui pulsazione ω_r sta a ω_s come la velocità di rotazione del campo rotante rispetto al rotore $\omega_o - \omega_m$ sta a quella ω_o rispetto allo statore e cioè a pulsazione

$$\omega_r = s\omega_s \quad (7.3.2)$$

detta *pulsazione di scorrimento*, ovvero a frequenza $f_r = sf_s$, *frequenza di scorrimento*.

Si pensi ora di chiudere gli avvolgimenti di rotore; in essi circoleranno tre correnti alternate equilibrate a pulsazione ω_r la cui ampiezza è determinata dall'ampiezza delle tensioni indotte e dall'impedenza dei circuiti rotorici alla frequenza di scorrimento. Il campo magnetico rotante dovuto a questa terna di correnti rotoriche (che avrà lo stesso numero di poli di quello di statore) ruota rispetto al rotore con velocità positiva proporzionale alle pulsazione di scorrimento e quindi pari a $s\omega_o$ e quindi rispetto a statore con velocità $s\omega_o + \omega_m = (\omega_o + \omega_m) + \omega_m = \omega_o$. I campi rotanti sostenuti dalle correnti statoriche e rotoriche a regime sinusoidale sono sincroni e quindi fissi l'uno rispetto all'altro. Da ciò la nascita di una interazione costante e di una coppia costante che, come si vedrà, per $\omega_m < \omega_o$ agisce sul rotore con verso concorde a quello di rotazione del campo magnetico e quindi tale da sostenere la rotazione del rotore.

Quanto appena ricavato per $0 < \omega_m < \omega_o$, è di fatto sempre valido.

Con $\omega_m = 0$ (rotore fermo) risulta $s = 1$ e la pulsazione delle correnti di rotore è pari a ω_s come quelle di statore: i due campi sono ovviamente sincroni.

Se $\omega_m < 0$ (rotore in moto in senso inverso rispetto al campo rotante di statore) risulta $s > 1$ e la pulsazione delle correnti di rotore risulta maggiore di ω_s : il campo rotante prodotto dalle correnti rotoriche gira proporzionalmente a velocità maggio di ω_o compensando il moto retrogrado del rotore stesso e restando ancora sincrono con quello statorico.

Infine se è $\omega_m > \omega_o$ (rotore in moto nel senso del campo rotante statorico con velocità maggiore di quella del campo stesso) risulta $s < 0$; il valore negativo che risulta per la frequenza di scorrimento sta a significare che le tre correnti di statore formano un terna equilibrata *inversa*: al massimo della corrente i_a segue quello della corrente i_c e quindi quello della i_b . Il campo rotante gira rispetto al rotore con moto retrogrado cosicché esso può restare ancora fisso rispetto a quello di statore sebbene il rotore ruoti ad una velocità maggio re di ω_o .

Nel caso particolare di $\omega_m = \omega_o$, cioè $s=0$ (*rotore in sincronismo*) non si hanno correnti indotte negli avvolgimenti rotorici in quanto, non essendoci alcuno scorrimento fra questi e il campo di statore, i flussi concatenati sono costanti.

Essendo i campi rotanti di statore e di rotorci sempre fissi fra loro essi si possono sommare per ottenere il campo rotante risultante al traferro. E' di fatto a questo che sono dovute le tensioni indotte nello statore e nel rotore.

Si riconosce che la macchina asincrona è assimilabile ad un trasformatore ove il primario è costituito dai circuiti di statore e il secondario dai circuiti di rotore. Ciò giustifica la denominazione di *macchina ad induzione*. Alle ben note proprietà del trasformatore si aggiunge qui però anche una trasformazione di frequenza che è associata pure ad una conversione elettromeccanica dell'energia.

Si ribadisce che quanto dedotto è valido per il regime sinusoidale, con correnti di ampiezza costante e frequenza fissa e con motore che gira ad una velocità costante. In condizioni dinamiche, con correnti la cui ampiezza e/o frequenza sono variabili nel tempo ovvero con velocità rotorica non costante, ancora gli avvolgimenti di statore e di rotore creano campi multipolari al traferro, ma essi hanno intensità in genere variabile, in movimento a velocità angolare non necessariamente fissa e con posizione reciproca che varia al variare delle condizioni operative.

7.3.2 – Rotore a gabbia – Si riportano di seguito alcune considerazioni sul comportamento di un rotore a gabbia in particolare con riferimento alla distribuzione di correnti che in esso viene a generarsi (per dimostrarne l'equivalenza con un rotore avvolto) e alla coppia da esso prodotta. Ancora le deduzioni saranno fatte con riferimento al funzionamento in regime sinusoidale, ma sono, nella loro essenza, di validità generale.

E' noto come un conduttore rettilineo di lunghezza l , percorso da una corrente i e immerso in un campo di induzione magnetica B uniforme lungo l e ortogonale al conduttore, è sottoposto ad una forza f normale alle linee di campo e al conduttore stesso di intensità $f = Bli$. Tale situazione si verifica per i conduttori degli avvolgimenti di statore e di rotore disposti assialmente e immersi nelle linee del campo radiale al traferro: su ciascuno di essi agirà una forza tangenziale (azimutale). Il contributo di tali forze lungo tutta la circonferenza del traferro determina la coppia sullo statore e sul rotore che risultano, come è ovvio, uguali ed opposte.

Per la valutazione della loro ampiezza si fa qui riferimento ad un rotore a gabbia. Si prenda in esame allora la Fig. 7.3.1 che mostra, *rettificato su una linea orizzontale*, un rotore a gabbia. Il diagramma a) rappresenta, in un generico istante, la distribuzione dell'induzione al traferro $B_{abc}(\epsilon)$ dovuta alle correnti statoriche; essa corre con velocità $v = r\omega_o$ lungo il traferro, essendo r il raggio al traferro.

In una generica barra rotorica, in moto con velocità assoluta $v = r\omega_m$ e relativa rispetto alla $B_{abc}(\epsilon)$ pari a $v = sr\omega_o$, sarà indotta una fem elementare e_{el} pari a:

$$e_{el} = Blv = B(\epsilon)l sr\omega_o \quad (7.3.3)$$

La distribuzione dell'intensità di tale fem segue in valore e segno quello della $B_{abc}(\epsilon)$, come illustrato nel diagramma b). Essa sarà massima nelle barre giacenti, istante per istante, nel punto di massimo del campo al traferro e cambierà di verso ove cambia di segno il campo rotante.

A causa delle fem e_{el} indotte, nelle singole barre si instaureranno delle correnti; se il circuito rotorico fosse puramente resistivo le correnti presenterebbero la stessa distribuzione lungo il traferro delle fem indotte. Essendo invece il circuito rotorico di natura resistivo-induttiva, la distribuzione delle correnti nelle sbarre sarà sinusoidale ma in ritardo rispetto a quella della tensione di un arco ϕ pari a

$$\varphi = \arctan \frac{X_{el,s}}{R_{el}} \quad (7.3.4)$$

ove $X_{el,s}$ rappresenta la reattanza elementare di ciascuna barra valutata alla frequenza di scorrimento, mentre R_{el} è la resistenza. La distribuzione è in genere come in fig. c).

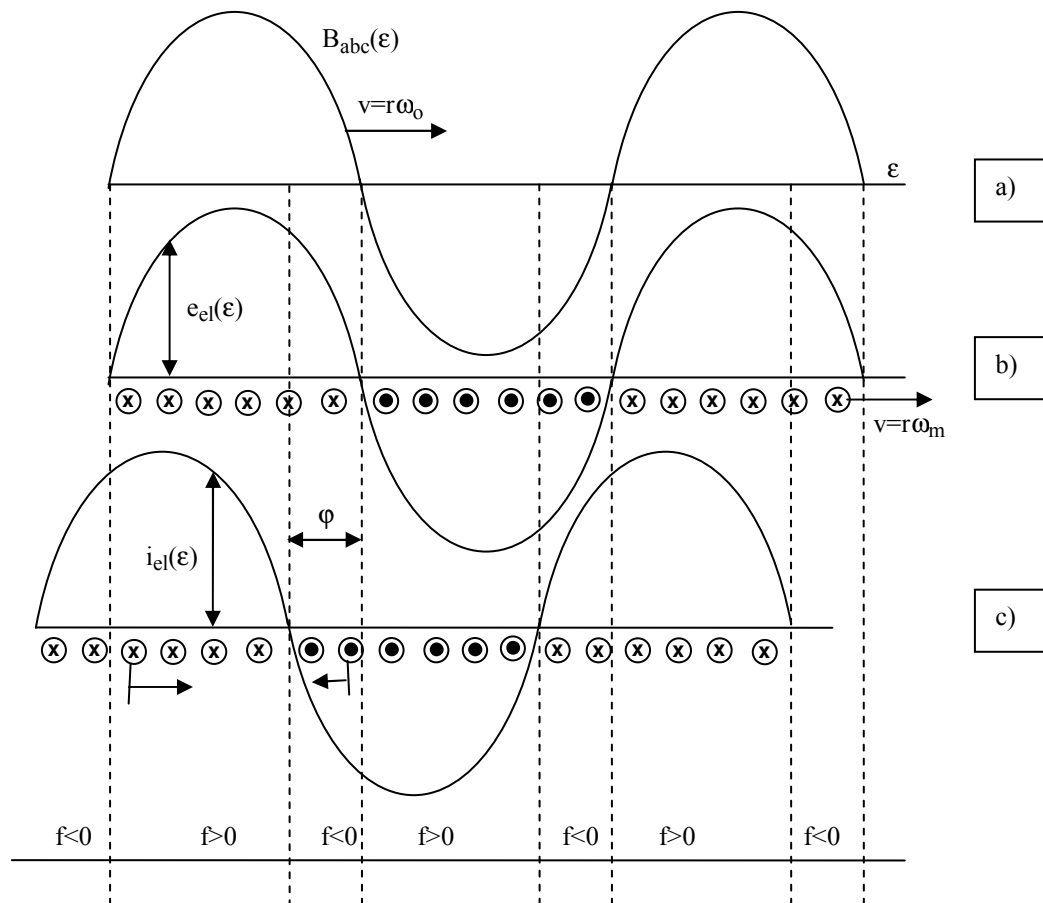


Fig. 7.3.1 – Distribuzione delle forze elettromotrici e delle correnti in un rotore a gabbia.

Il diagramma c) mostra che automaticamente nelle barre di rotore si viene a creare un distribuzione di correnti avente lo stesso numero di poli del campo rotante generato dalle correnti statoriche e cioè del numero di poli dell'avvolgimento di statore. Tale condizione, essenziale per una interazione dinamica non nulla fra statore e rotore, è invece assicurata in un rotore avvolto dalla realizzazione dell'avvolgimento di rotore con lo stesso numero di poli di quello di statore.

E' ora possibile valutare la coppia conseguente all'interazione fra le correnti elementari rotoriche e l'induzione magnetica dovuta alle correnti statoriche⁶. Su ogni barra della gabbia rotorica agisce una forza elementare

$$f_{el} = Bli = B(\epsilon)li_{el} \quad (7.3.5)$$

⁶ Tracciando qualitativamente la distribuzione dell'induzione al traferro dovuta alle correnti rotoriche, si realizza facilmente che l'interazione fra questa e le correnti rotoriche stesse è complessivamente nulla (così come quella fra le correnti statoriche e l'induzione da esse prodotta). bSe così non fosse si avrebbe una coppia non nulla con un solo avvolgimento sullo statore o sul rotore.

e quindi una coppia elementare

$$m_{el} = f_{el}r \quad (7.3.6)$$

Alcune di queste forze e coppie elementari saranno rivolte secondo il verso di rotazione del campo, altre in verso opposto come schematizzato in fig. c). La coppia generata M risultante, positiva se diretta secondo il moto del campo rotante, si ottiene sommando le coppie elementari dovute ad ogni sbarra; ciò equivale a moltiplicare per N_b , se questo è il numero delle barre, il valore medio della distribuzione della coppia elementare al traferro cioè:

$$M = \frac{N_b lr}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(\varepsilon) i_{el}(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{N_b lr \hat{B} \hat{I}_{el}}{2} \cos \varphi \quad (7.3.7)$$

L'espressione (7.3.7) può essere scritta in altro modo ricordando che è:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{el} &= \hat{B} l s r \omega_0 \\ \hat{E}_{el} &= \hat{I}_{el} Z_{el,s} \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

con $Z_{el,s}$ l'impedenza elementare alla frequenza di scorrimento, e quindi, uguagliando le (7.3.8)

$$\hat{B} = \frac{\hat{I}_{el} Z_{el,s}}{l s r \omega_0} \quad (7.3.9)$$

che sostituita porge:

$$M = \frac{N_b (\hat{I}_{el})^2 Z_{el,s}}{2s\omega_0} \cos \varphi = \frac{I_{el}^2 R_{el} N_b}{s\omega_0} \quad (7.3.10)$$

ove I_{el} rappresenta il valore efficace delle correnti in ciascuna barra, che visto il presunto andamento sinusoidale vale $I_{el} = \hat{I}_{el} / \sqrt{2}$.

Essendo $(I_{el})^2 R_{el} N_b$ la totale potenza dissipata per effetto Joule P_{jr} nella gabbia rotorica si riconosce che

$$M = \frac{P_{jr}}{s\omega_0} \quad (7.3.11)$$

Tale espressione è valida quale che sia la struttura dell'avvolgimento di rotore; in particolare se ancora si pensa ad un equivalente avvolgimento trifase e si indica con R_r e I_r rispettivamente la resistenza e il valore efficace della corrente di ciascuna fase, si ha:

$$M = \frac{3I_r^2 R_r}{s\omega_0} \quad (7.3.12)$$

mentre la potenza meccanica generata risulta (si ricordi che $\omega_m = (1-s)\omega_0$):

$$P = M\omega_m = \frac{3I_r^2 R_r}{s}(1-s) \quad (7.3.13)$$

corrispondente alla potenza che le correnti rotoriche dissiperebbero su una fittizia resistenza $R_r(1-s)/s$. La totale potenza coinvolta nel rotore, *potenza trasmessa* P_{tr} dallo statore al rotore o *potenza al traferro*, pari alle perdite Joule di rotore e alla potenza meccanica generata vale:

$$P_{tr} = P + P_{jr} = \frac{3I_r^2 R_r}{s} \quad (7.3.14)$$

Al di là delle espressioni analitiche, conviene fare alcune considerazioni. La (7.3.10) mostra che la coppia dipende sia dall'intensità delle correnti di rotore che dalle sfasamento fra queste e le rispettive fem. Per piccoli valori di scorrimento, come si verifica attorno alle condizioni nominali di funzionamento, la frequenza di scorrimento è piccola e quindi il circuito rotorico si presenta pressoché puramente resistivo: si ha allora $\varphi \approx 0$ mentre le correnti risultano proporzionali alle fem le quali crescono linearmente con s . Per i valori piccoli dello scorrimento si ha pertanto una coppia crescente con lo scorrimento stesso, se l'intensità massima del campo rotante al traferro dovuto alle correnti statoriche si mantiene costante.

All'aumentare dello scorrimento e quindi della frequenza rotorica, l'impedenza di rotore aumenta a causa dell'effetto induttivo. In tal caso la corrente di rotore cresce meno che linearmente con s ed inoltre ritarda rispetto alla tensione indotta. Il risultato globale è che la coppia aumenta con lo scorrimento fino ad un valore massimo (sempre nelle ipotesi di induzione massima costante al traferro dovuta alle correnti statoriche).

Si vede poi come la coppia sia proporzionale alla potenza dissipata nel rotore. Un motore ipotetico con resistenza rotorica nulla presenterebbe pertanto anche coppia identicamente nulla (per ogni $s \neq 0$).

Si osserva anche che la coppia ha lo stesso segno di s ; infatti per ogni $s > 0$ si presenta sempre la situazione illustrata in Fig. 7.3.1. Per $s < 0$ invece si inverte il moto relativo fra campo rotante e rotore (la velocità relativa è infatti data da $s\omega_0$) e quindi si invertono i versi di e_{el} e i_{el} . La coppia che ne consegue cambia di segno.

Infine è forse il caso di ricordare che la coppia utile (resa) all'albero e la relativa potenza sono, in pratica, diverse da quelle generate sopra calcolate a causa delle perdite meccaniche per attrito e ventilazione entro il motore.

7.4 – Comportamento dinamico del motore a induzione

D'ora in poi si farà dunque riferimento per il rotore ad un avvolgimento trifase distribuito del tutto simile a quello di statore, senza più preoccuparsi di quale sia l'effettiva struttura costruttiva del rotore stesso.

Per richiamare il funzionamento del motore a induzione si può partire dalle equazioni generali di bilancio delle tensioni delle sue fasi a,b,c statoriche e rotoriche, che con la convenzione degli utilizzatori sono per lo statore:

$$\begin{aligned} u_{sa} &= R_s i_{sa} + \frac{d\lambda_{sa}}{dt} \\ u_{sb} &= R_s i_{sb} + \frac{d\lambda_{sb}}{dt} \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

$$u_{sc} = R_s i_{sc} + \frac{d\lambda_{sc}}{dt}$$

e per il rotore

$$\begin{aligned} 0 &= R_r i_{ra} + \frac{d\lambda_{ra}}{dt} \\ 0 &= R_r i_{rb} + \frac{d\lambda_{rb}}{dt} \\ 0 &= R_r i_{rc} + \frac{d\lambda_{rc}}{dt} \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

dove si è omessa per semplicità la dipendenza dal tempo delle tensioni u , delle correnti i e dei flussi concatenati λ .

Ciascuno dei flussi concatenati che appare nelle (7.4.1) e (7.4.2) è dovuto all'effetto combinato di tutte le correnti presenti nel motore. Assumendo che il circuito magnetico sia privo di correnti parassite ed inoltre non manifesti saturazione e isteresi magnetiche, ciascun flusso concatenato, per esempio λ_{sa} , potrà essere espresso come:

$$\lambda_{sa} = \lambda_{ssa} + \lambda_{sra} \quad (7.4.3)$$

ove i due contributi sono:

$$\lambda_{ssa} = L_{ss} i_{sa} + L_{Mss} i_{sb} + L_{Mss} i_{sc} \quad (7.4.4)$$

$$\lambda_{sra} = l_{Msr}(\vartheta_{me}) i_{ra} + l_{Msr}(\vartheta_{me} + 2\pi/3) i_{rb} + l_{Msr}(\vartheta_{me} + 4\pi/3) i_{rc} \quad (7.4.5)$$

Per la simmetria cilindrica e l'isotropia della struttura, si è posto costante, ovvero indipendente dalla posizione ϑ_{me} del rotore, il coefficiente L_{ss} di auto induzione della fase di statore, costanti e uguali i coefficienti di mutua induzione $-L_{Mss}$ fra le fasi di statore b e c e la fase a, e pure tutti espressi dalla stessa funzione $l_{Msr}(\vartheta_{me})$ i coefficienti di mutua induzione fra le fasi di statore e rotore. Rappresentando $l_{Msr}(\vartheta_{me})$ con una funzione cosinusoidale ($l_{Msr} = L_{Msr} \cos(\vartheta_{me})$), la (7.4.5) diventa:

$$\lambda_{sra} = L_{Msr} \cos(\vartheta_{me}) i_{ra} + L_{Msr} \cos(\vartheta_{me} + 2\pi/3) i_{rb} + L_{Msr} \cos(\vartheta_{me} + 4\pi/3) i_{rc} \quad (7.4.6)$$

Ripetendo le (7.4.3) per le altre cinque fasi e unendo le espressioni dei flussi così ottenute alle (7.4.1) e (7.4.2) si ottiene il sistema differenziale che descrive la dinamica elettrica del motore in esame. Appare evidente la sua complessità dovuta anche alla dipendenza di alcuni suoi coefficienti dalla posizione rotorica.

Se si considerano avvolgimenti di statore privi del filo neutro e si assume che per la simmetria della macchina le terne di forze contro elettromotrici che insorgono in ciascun avvolgimento siano altrettanto prive di componente omopolare, si può semplificare la descrizione della macchina facendo ricorso alla rappresentazione delle grandezze trifase mediante i vettori spaziali, come illustrato in dettaglio nel prossimo par.7.2.

Analogamente a quanto studiato per i motori sincroni a magnete permanente isotropi si può dimostrare che la componente omopolare, qualora fosse presente, non modificherebbe la coppia prodotta dal motore per un dato insieme di correnti di fase, e pertanto l'averla tralasciata non influisce sui risultati che si otterranno in questo paragrafo e nei successivi.

Alcuni accorgimenti che si adottano comunemente negli azionamenti per motori asincroni si basano sul presupposto di non avere componente omopolare nelle correnti. Questo sarà comunque esplicitamente richiamato in tutte le occorrenze.

7.5 - Equazioni dinamiche e schema a blocchi

Nei paragrafi che seguono si rielaboreranno le equazioni dinamiche del motore a induzione appena viste per ricavarne delle versioni di più facile uso ai fini dello studio della dinamica e del controllo del motore. Allo scopo si farà uso dello strumento dei vettori spaziali definiti in opportuni sistemi di riferimento.

7.5.1 – Equazioni di statore nel sistema di riferimento stazionario $d^s q^s$ - Facendo riferimento ad un sistema di assi ortogonali $d^s q^s$ fissi con lo statore⁷, la trasformazione delle (7.1.1) porta a:

$$\mathbf{u}_s^s = R_s \mathbf{i}_s^s + \frac{d\boldsymbol{\lambda}_s^s}{dt} \quad (7.5.1)$$

Il vettore spaziale del flusso di statore può essere facilmente espresso in funzione dei vettori delle correnti statoriche e rotoriche trasformando le (7.1.4) e (7.1.5) scritte per tutte e tre le fasi di statore. Dalla prima si ottiene:

$$\boldsymbol{\lambda}_{ss}^s = L_s \mathbf{i}_s^s \quad (7.5.2)$$

ove, in analogia con il motore sincrono a magneti permanenti,

$$L_s = L_{ss} + |L_{Mss}| \quad (7.5.3)$$

prende il nome di *induttanza sincrona di statore* (o semplicemente *induttanza di statore*). Analogamente dalla (7.1.5) si perviene all'espressione del flusso prodotto dall'avvolgimento di rotore che si concatena con lo statore:

$$\boldsymbol{\lambda}_{sr}^s = L_M \mathbf{i}_r^s \quad (7.5.4)$$

ove

$$L_M = \frac{3}{2} L_{Msr} \quad (7.5.5)$$

viene denominata *mutua induttanza (sincrona) fra statore e rotore*, mentre il vettore spaziale della corrente rotorica nel sistema di riferimento stazionario è dato da:

$$\mathbf{i}_r^s = \frac{2}{3} \left(i_{ra} + i_{rb} e^{j2\pi/3} + i_{rc} e^{j4\pi/3} \right) e^{-j\vartheta_{me}} \quad (7.5.6)$$

essendo ϑ_{me} la posizione del sistema di riferimento d^r, q^r fisso con il rotore rispetto a d^s, q^s . Scrivendo la (7.1.3) per le tre fasi ed applicando anche per essa la definizione di vettore spaziale, tenendo conto delle (7.5.2) e (7.5.4) si ottiene:

⁷ L'apice indicherà, in generale, il sistema di coordinate a cui ci si riferisce. Questa complicazione nella simbologia è richiesta dalla possibilità di avere, nella trattazione del motore asincrono, diversi sistemi di riferimento, ciascuno con proprie peculiarità.

$$\boldsymbol{\lambda}_s^s = \boldsymbol{\lambda}_{ss}^s + \boldsymbol{\lambda}_{sr}^s = L_s \mathbf{i}_s^s + L_m \mathbf{i}_r^s \quad (7.5.7)$$

7.5.2 – Equazioni di statore nel sistema di riferimento d^xq^x generico - Moltiplicando ambo i membri per il termine $e^{-j\vartheta_x}$ si ha anche

$$\boldsymbol{\lambda}_s^x = L_s \mathbf{i}_s^x + L_M \mathbf{i}_r^x \quad (7.5.8)$$

che esprime il flusso di statore secondo un generico riferimento sfasato di ϑ_x (in generale, variabile nel tempo) rispetto al sistema stazionario fisso allo statore. Allo stesso modo, la (7.5.1) può essere espressa secondo tale generico riferimento come:

$$\mathbf{u}_s^x = R_s \mathbf{i}_s^x + \frac{d\boldsymbol{\lambda}_s^x}{dt} + j\omega_g \boldsymbol{\lambda}_s^x \quad (7.5.9)$$

7.5.3 – Equazioni di rotore nel sistema di riferimento stazionario d^sq^s - In modo del tutto analogo si può procedere per il rotore. Facendo dapprima riferimento ad un sistema di assi ortogonali d^r, q^r fisso con il rotore e con l'asse diretto coincidente con l'asse della fase a di rotore, la trasformazione delle (7.1.2) fornisce:

$$\mathbf{0} = R_r \mathbf{i}_r^r + \frac{d\boldsymbol{\lambda}_r^r}{dt} \quad (7.5.10)$$

Anche il vettore spaziale del flusso di rotore può essere facilmente espresso in funzione dei vettori delle correnti statoriche e rotoriche. Procedendo in maniera analoga a quanto visto per lo statore si scrive:

$$\boldsymbol{\lambda}_{rr}^r = L_r \mathbf{i}_r^r \quad (7.5.11)$$

ove

$$L_r = L_{rr} + |L_{Mrr}| \quad (7.5.12)$$

prende il nome di *induttanza sincrona di rotore* (o semplicemente *induttanza di rotore*). In modo analogo a quanto visto per la (7.5.4) si perviene all'espressione del flusso prodotto dall'avvolgimento di statore che si concatena con il rotore:

$$\boldsymbol{\lambda}_{sr}^r = L_M \mathbf{i}_s^r \quad (7.5.13)$$

dove L_M è ancora data dalla (7.5.5).

Il flusso rotorico totale è dunque

$$\boldsymbol{\lambda}_r^r = \boldsymbol{\lambda}_{rr}^r + \boldsymbol{\lambda}_{rs}^r = L_r \mathbf{i}_r^r + L_m \mathbf{i}_s^r \quad (7.5.14)$$

Moltiplicando ambo i membri della (7.5.10) per $e^{j\vartheta_{me}}$ si ottiene la sua espressione secondo il sistema di riferimento stazionario:

$$\mathbf{0} = R_r \mathbf{i}_r^s + \frac{d\boldsymbol{\lambda}_r^s}{dt} - j\omega_{me} \boldsymbol{\lambda}_r^s \quad (7.5.15)$$

ove facilmente si trova:

$$\boldsymbol{\lambda}_r^s = \boldsymbol{\lambda}_r^r e^{j\theta_{me}} = L_r \mathbf{i}_r^s + L_M \mathbf{i}_s^s \quad (7.5.16)$$

7.5.4 – Equazioni di rotore nel sistema di riferimento d^x-q^x generico - Le ultime due espressioni possono essere espresse secondo un sistema di riferimento generico d^x-q^x, moltiplicando tutto per e^{-jθ^x} ed ottenendo due espressioni analoghe rispettivamente alla (7.5.9) e (7.5.8) anche per il rotore:

$$0 = R_r \mathbf{i}_r^x + \frac{d\boldsymbol{\lambda}_r^x}{dt} + j(\omega_x - \omega_{me}) \boldsymbol{\lambda}_r^x \quad (7.5.17)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_r^x = L_r \mathbf{i}_r^x + L_M \mathbf{i}_s^x \quad (7.5.18)$$

E' interessante osservare in generale che:

- Le equazioni a cui si è pervenuti non contengono più la dipendenza dalla posizione angolare del rotore; esse tuttavia contengono la velocità di rotazione ω_{me} .
- Le due equazioni di rotore ottenute componendo quelle scritte nelle loro componenti d (reale) e q (immaginaria) in un sistema di riferimento stazionario non sono fra loro indipendenti, comparando in entrambe sia componenti dirette che in quadratura delle correnti o dei flussi, ogniqualvolta la velocità di rotazione del rotore è diversa da zero. In conseguenza del mutuo legame induttivo con lo statore, tale accoppiamento fra gli assi d e q si manifesta anche fra le equazioni statoriche.
- Le (7.5.18) sono equivalenti alle equazioni statoriche del motore sincrono a magneti permanenti, nel sistema di riferimento sincrono. La discordanza di segno sui termini rotazionali deriva dal differente segno della velocità del sistema di riferimento rispetto agli avvolgimenti considerati nei due diversi casi⁸.

E' possibile dimostrare l'equivalenza del rotore a gabbia con un rotore del tipo utilizzato nei motori in corrente continua, avente due coppie fisse ed ortogonali di spazzole in cortocircuito.

7.5.5 – Equazioni della coppia - E' ora di interesse trovare un'espressione per la coppia meccanica sviluppata dal motore. Si può utilizzare una procedura analoga a quella applicata nello studio del motore sincrono a magneti permanenti (cfr. par.5.1), moltiplicando ambo i membri delle (7.5.1) rispettivamente per $i_{sd}^s dt$ e $i_{sq}^s dt$, ed i membri delle (7.5.15) rispettivamente per $i_{rd}^s dt$ e $i_{rq}^s dt$; sommando membro a membro le quattro equazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} (u_{sd}^s i_{sd}^s + u_{sq}^s i_{sq}^s) dt = R_s (i_{sd}^s)^2 dt + R_s (i_{sq}^s)^2 dt + R_r (i_{rd}^s)^2 dt + R_r (i_{rq}^s)^2 dt + \\ + i_{sd}^s d\lambda_{sd}^s + i_{sq}^s d\lambda_{sq}^s + i_{rd}^s d\lambda_{rd}^s + i_{rq}^s d\lambda_{rq}^s + \omega_{me} (\lambda_{rq}^s i_{rd}^s - \lambda_{rd}^s i_{rq}^s) dt \quad (7.5.20) \end{aligned}$$

⁸ Come si ricorderà, nel motore sincrono si esprimono le tensioni di statore in un riferimento sincrono con il rotore, quindi rotante con velocità $+\omega_{me}$ rispetto allo statore; viceversa, le (7.2.18) sono le equazioni di tensione del rotore scritte secondo un sistema stazionario, ovvero solidale allo statore, ovvero, se si vuole, rotante con velocità $-\omega_{me}$ rispetto al rotore.

Il primo membro rappresenta l'energia elettrica fornita al motore nel tempo dt , ed è legata com'è ovvio alle sole grandezze di statore. A secondo membro, i primi quattro termini rappresentano l'energia trasformata in calore sulle resistenze di tutti gli avvolgimenti. Il secondo gruppo di quattro termini è il differenziale esatto dell'energia magnetica immagazzinata nel tempo dt nei circuiti magnetici di rotore e di statore. L'ultimo termine rappresenta infine l'energia meccanica sviluppata nel tempo dt . Ricordando che la potenza ad essa associata va aumentata del fattore $3/2$ nel passaggio dal sistema di riferimento sincrono a quello stazionario, si perviene all'espressione cercata:

$$m = \frac{3}{2} p (\lambda_{rq}^s i_{rd}^s - \lambda_{rd}^s i_{rq}^s) \quad (7.5.21)$$

Utilizzando le notazioni vettoriali, si può verificare in modo diretto che la coppia (7.5.21) può essere espressa anche come segue⁹:

$$m = \frac{3}{2} p \Im \left(\lambda_r^s \overset{\vee}{i}_r \right) = \frac{3}{2} p \Im \left(\lambda_r^x \overset{\vee}{i}_r \right) = \frac{3}{2} p \Re \left(-j \lambda_r^x \overset{\vee}{i}_r \right) \quad (7.5.22)$$

dove il simbolo \vee è l'operatore *complesso coniugato*. Utilizzando la (7.5.18) per eliminare la corrente di rotore nella (7.5.22) si ottiene:

$$m = \frac{3}{2} p \Im \left(\lambda_r^g \left(\frac{\overset{\vee}{i}_r}{L_r} - \frac{L_M}{L_r} \overset{\vee}{i}_s \right) \right) = -\frac{3}{2} p \frac{L_M}{L_r} \Im \left(\lambda_r^x \overset{\vee}{i}_s \right) = \frac{3}{2} p \frac{L_M}{L_r} (\lambda_{rd}^x i_{sq}^x - \lambda_{rq}^x i_{sd}^x) \quad (7.5.23)$$

che, riscritta in coordinate polari, porge un'espressione particolarmente significativa per la coppia:

$$m = \frac{3}{2} p \frac{L_M}{L_r} |\lambda_r| |i_s| \sin(\psi) \quad (7.5.24)$$

dove si è definito *l'angolo di coppia* $\psi = \vartheta_{i_s} - \vartheta_{\lambda_s}$.

E' importante sottolineare che i diversi fattori nella (7.5.24) sono tutti indipendenti dal sistema di riferimento e pertanto essa è da considerarsi di validità generale.

A differenza del motore sincrono a magneti permanenti, nel motore asincrono il flusso di rotore non è generato da un magnete, ma dalle correnti di statore e di rotore che nascono per effetto delle fem indotte dal campo magnetico di statore. La (7.5.24) racchiude il delicato concetto che le correnti di statore generano la coppia sia intervenendo direttamente, che attraverso la formazione del flusso di rotore. Nel motore in corrente continua ad eccitazione indipendente questi ruoli erano separati, ed affidati rispettivamente alla

⁹ La (7.2.15) scritta per il generico sistema di riferimento x porge $\mathbf{g}^s = \mathbf{g}^x e^{j\vartheta_x}$. Utilizzando la notazione cartesiana, si dimostra in modo diretto che il complesso coniugato di \mathbf{g}^s nel sistema generico vale

$$\overset{\vee}{\mathbf{g}}^s = \overset{\vee}{\mathbf{g}}^x e^{-j\vartheta_x}$$

Applicando questo risultato alla (7.2.27) si trova subito la (7.2.29).

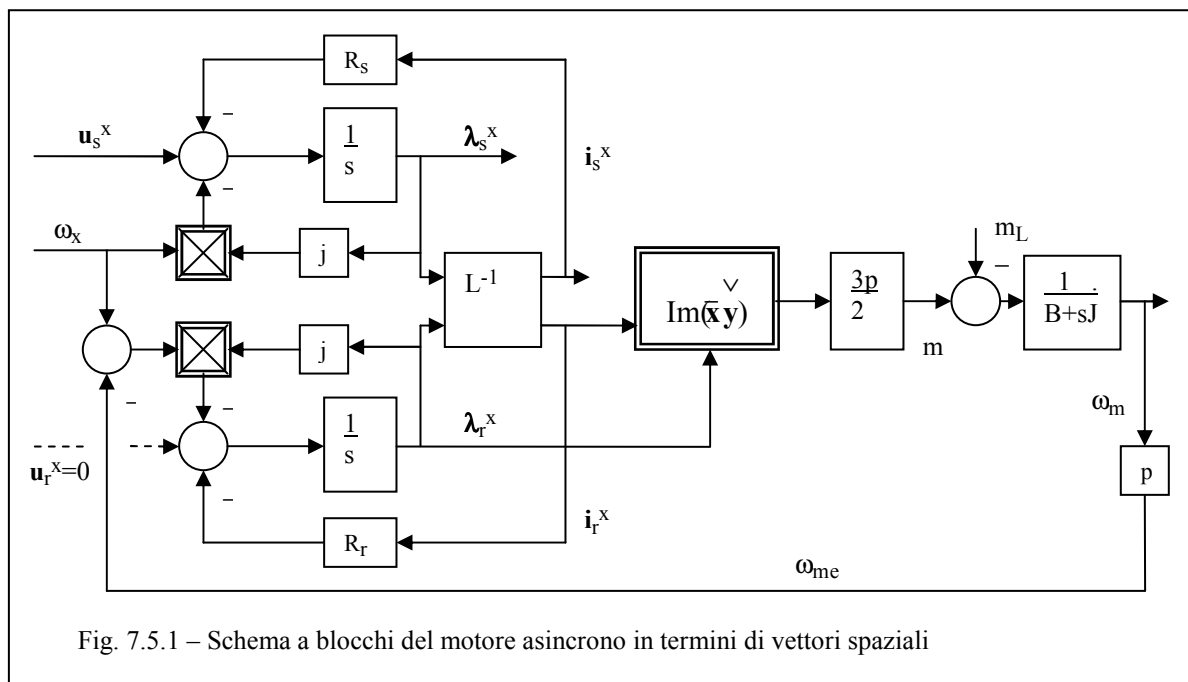


Fig. 7.5.1 – Schema a blocchi del motore asincrono in termini di vettori spaziali

corrente d'armatura e alla corrente magnetizzante. Il loro controllo distinto porta ad elevate prestazioni dinamiche. Allo stesso modo, i metodi di controllo più avanzati del motore asincrono operano in un opportuno sistema di riferimento, secondo il quale le componenti reale ed immaginaria delle correnti di statore coincidono rispettivamente proprio con la parte che produce flusso (*flux-producing component*) e quella che produce coppia (*torque-producing component*). Si ottiene così di poter sfruttare per gli azionamenti per motori asincroni molti dei risultati ottenuti con gli azionamenti in continua.

Partendo dalle relazioni (7.5.22) e sfruttando le relazioni (7.5.8) e (7.5.18) fra i flussi concatenati e le correnti, si possono ricavare numerose altre equivalenti espressioni della coppia a seconda delle esigenze del particolare schema di controllo.

Esercizio: A partire dalla (7.5.21) e dalle (7.5.8) e (7.4.18) ricavare le altre espressioni della coppia in funzione di ogni altra possibile combinazione delle correnti e dei flussi.

Allo stesso modo, a seconda del sistema di riferimento che viene adottato cambiano le espressioni delle tensioni e della coppia; per ogni scelta è possibile dunque tracciare uno schema a blocchi diverso. Quello più generale potrebbe essere tratto dalle equazioni (7.5.9), (7.5.17), (7.5.23) associate al generico riferimento d^g, q^g . Esso risulta come in Fig. 7.5.1.

Lo schema a blocchi è tracciato in termini di grandezze vettoriali. Nella figura il blocco L^{-1} rappresenta le relazioni inverse delle (7.5.8) e (7.5.18) così da ottenere le correnti in funzione dei flussi concatenati.

7.6 - Circuiti elettrici equivalenti

Ciascuna combinazione di equazioni di statore e di rotore del paragrafo precedente può essere rappresentata da un circuito elettrico equivalente, descrittivo del motore ad induzione. Fra tutte le possibilità è di interesse far riferimento al caso in cui la dinamica dello statore sia descritta in un sistema di riferimento stazionario rispetto allo statore stesso.

Per quanto riguarda il rotore, è conveniente la scelta dello stesso sistema di riferimento stazionario, per evitare che lo schema equivalente associato risulti particolarmente complicato. Si può dunque far riferimento alle equazioni (7.5.1), (7.5.7) e (7.5.15), (7.5.16) che consentono di

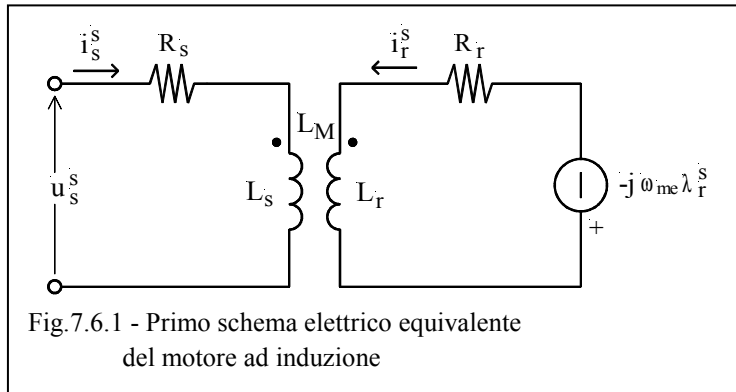


Fig.7.6.1 - Primo schema elettrico equivalente del motore ad induzione

tracciare il seguente schema elettrico equivalente:

Pare opportuno evidenziare che lo schema elettrico ricavato è relativo al modello matematico dinamico del motore e le grandezze riportate sono vettori spaziali.

Il mutuo induttore di Fig.7.6.1 è reciproco¹⁰ e conservativo; si può dimostrare che se si scelgono sistemi di riferimento per il rotore e lo statore

con velocità angolari di rotazione diverse entrambe le proprietà vengono a mancare. L'evidente aumento della complessità è naturalmente legato alla maggior generalità di tale trattazione.

Ci si può facilmente rendere conto che la potenza elettrica assorbita dalla f.e.m. di origine mozionale presente nel circuito di rotore è pari al lavoro meccanico prodotto dal motore. Per dimostrarlo occorre ricordare un risultato della teoria dei vettori spaziali qui riportato per comodità:

$$u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c = \frac{3}{2} \Re \left(u^s \hat{i}^s \right) = \frac{3}{2} \Re \left(u^x e^{j\vartheta_x} \hat{i}^x e^{-j\vartheta_x} \right) = \frac{3}{2} \Re \left(u^x \hat{i}^x \right) \quad (7.6.1)$$

ovvero che la potenza elettrica di un sistema formato da una terna di f.e.m. u_a, u_b, u_c che erogano rispettivamente le correnti i_a, i_b, i_c può essere espressa in forma concisa attraverso i vettori spaziali di tensione e corrente associati alle terne in questione.

La (7.6.1) può anche essere utilizzata per definire la potenza assorbita dal generatore vettoriale di Fig.7.6.1; essa vale:

$$\frac{3}{2} \Re \left(-j \omega_m \lambda_r^s \hat{i}_r^s \right) = \omega_m \frac{3}{2} p \Re \left(-j \lambda_r^s \hat{i}_r^s \right) = \omega_m m \quad (7.6.2)$$

dove per scrivere l'ultima uguaglianza si è usata l'espressione della coppia contenuta nella (7.5.22).

I circuiti elettrici equivalenti che verranno ricavati nel corso del paragrafo si basano sulle equazioni vettoriali che descrivono la dinamica del motore e quindi hanno carattere generale; essi possono tuttavia venire particolarizzati per il regime sinusoidale. In tale situazione esiste una analogia formale tra la rappresentazione di una terna trifase di grandezze secondo i vettori spaziali e la rappresentazione della prima grandezza della terna secondo i fasori temporali (*rappresentazioni simboliche*). In altre parole, alla generica terna simmetrica sinusoidale di ampiezza G , fase iniziale γ e pulsazione ω_s per la quale $g_a = G \cos(\omega_s t + \gamma)$ corrisponde il vettore

¹⁰ Intuitivamente, in un doppio bipolo reciproco nulla cambia se le grandezze al primario sono considerate "ingressi" e quelle al secondario "uscite" rispetto alla situazione opposta.

spaziale $\mathbf{g} = G e^{j\gamma} e^{j\omega_s t}$ mentre alla prima di esse, g_a corrisponde il fasore temporale $\bar{g} = G e^{j\gamma}$. Nella rappresentazione dei fasori temporali ci si basa sulla considerazione che tutti i fasori ruotano con la stessa velocità angolare, pari alla pulsazione ω_s , che viene perciò omessa nella definizione; di conseguenza tutti i diagrammi vettoriali risultano stazionari. Facendo una uguale considerazione per i vettori spaziali in regime sinusoidale, anche i loro diagrammi vettoriali risultano stazionari, e l'analogia tra le due forme di rappresentazione diventa perfetta.

Per quanto detto, ciascuno dei circuiti elettrici equivalenti che saranno tracciati di seguito può essere visto anche come la rappresentazione del circuito equivalente in regime sinusoidale della fase a di statore, pensando di sostituire ai vettori spaziali i relativi fasori temporali.

Si vedranno ora alcuni circuiti elettrici equivalenti derivati da quello di Fig.7.6.1, ognuno con qualche importante caratteristica distintiva. In generale, ogni mutuo induttore può essere schematizzato con un doppio bipolo di induttanze contenente un trasformatore, come in Fig.7.6.2:

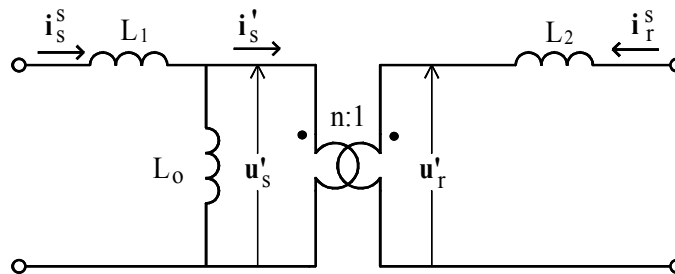


Fig.7.6.2 - Schema equivalente di un mutuo induttore

Per ogni scelta arbitraria del rapporto spire n del trasformatore ideale di Fig.7.6.2, con riferimento ai simboli di Fig.7.6.1 valgono le relazioni¹¹:

$$\begin{aligned} L_s &= L_1 + L_0 \\ L_M &= L_0/n \\ L_r &= L_2 + L_0/n^2 \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

da cui:

$$\begin{aligned} L_0 &= nL_M \\ L_1 &= L_s - nL_M \\ L_2 &= L_r - L_M/n \end{aligned} \quad (7.6.4)$$

Si può ora sostituire lo schema di Fig.7.3.2 in quello di Fig.7.3.1 e riportare al primario tutte le grandezze che appaiono al secondario, eliminando così il trasformatore ideale. L'equazione di tensione al secondario risulta:

$$\mathbf{u}'_r = -R_r \mathbf{i}_r^s - (L_r - L_M/n) \frac{d\mathbf{i}_r^s}{dt} + j\omega_{me} \lambda_r^s \quad (7.6.5)$$

¹¹ La dimostrazione è immediata; è sufficiente scrivere il sistema di equazioni di bilancio delle tensioni al primario e al secondario per i due schemi e confrontarle, ricordando che per il trasformatore ideale di Fig.7.3.2 il rapporto tra le tensioni primaria e secondaria vale n ed il rapporto tra le correnti, con il versi di figura, vale $-1/n$.

Moltiplicando ambo i membri per il rapporto di trasformazione n si ha:

$$\mathbf{u}'_s = -nR_r \mathbf{i}'_r - (nL_r - L_M) \frac{d\mathbf{i}'_r}{dt} + jn\omega_{me} \lambda_r^s = n^2 R_r \mathbf{i}'_s + n^2 (L_r - L_M/n) \frac{d\mathbf{i}'_s}{dt} + jn\omega_{me} \lambda_r^s \quad (7.6.6)$$

dove è naturalmente

$$\mathbf{i}'_r = -n\mathbf{i}'_s.$$

Lo schema elettrico equivalente con tutte le grandezze riportate al primario è allora il seguente:

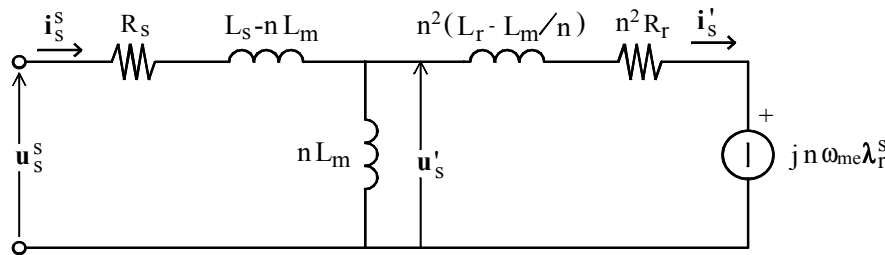


Fig.7.6.3 - Secondo schema elettrico equivalente del motore ad induzione

Come anticipato, per quanto riguarda i valori da assegnare ad n si possono individuare alcuni casi di particolare interesse. Per ciascuno di essi verrà riportato il circuito elettrico equivalente con e senza il trasformatore.

a) $n = 1$

In questo caso le grandezze riportate al primario coincidono con quelle del secondario e pertanto il trasformatore può essere ignorato. Il vantaggio è di disporre di un circuito in cui appaiono senza fattori di scala sia le grandezze statoriche che quelle rotoriche, come evidenziato dalla seguente Fig.7.6.4:

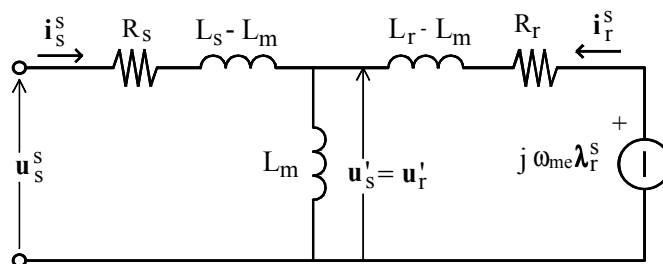


Fig.7.6.4 - Schema elettrico equivalente del motore ad induzione, con $n=1$

b) $n = L_M/L_r$

Questo particolare valore rende nulla il valore dell'induttanza a secondario; a primario appare l'induttanza di transizione L_t , già incontrata nella trattazione del modello del motore asincrono in un sistema di riferimento solidale al flusso rotorico (cfr. par.7.2). La Fig.7.3.5 riporta gli schemi elettrici equivalenti.

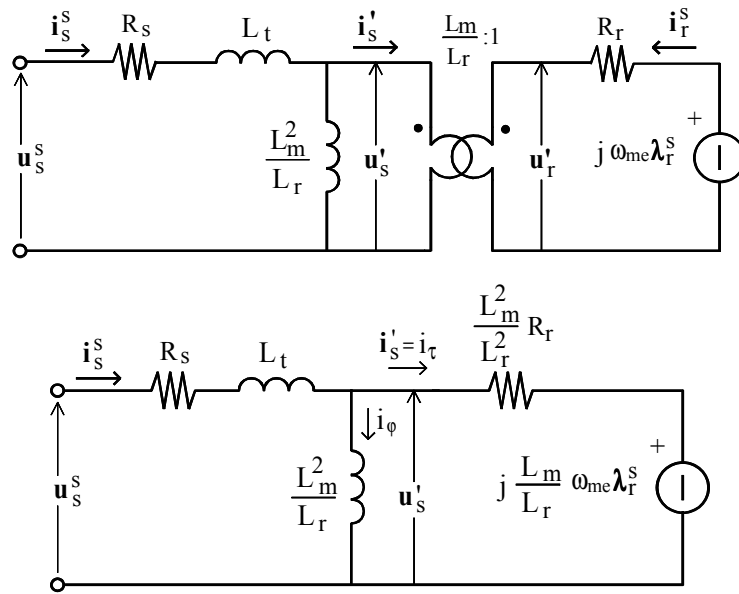


Fig.7.6.5 - Schema elettrico equivalente del motore ad induzione, con $n=L_M/L_r$

Ricordando che per riportarla a primario la corrente i_r^s va divisa per $(-n)$, la corrente i_ϕ di Fig.7.6.5 vale:

$$i_\phi = i_s^s + \frac{L_r}{L_M} i_r^s = i_s^s + i_{sr}^s = \left(i_{sd}^s + \frac{L_r}{L_M} i_{rd}^s \right) + j \left(i_{sq}^s + \frac{L_r}{L_M} i_{rq}^s \right) \quad (7.6.7)$$

c) $n = L_s/L_m$

In modo analogo al caso precedente, questa scelta di n annulla il valore dell'induttanza a primario; la Fig. 7.6.6 ne riporta i circuiti elettrici equivalenti.

d) $n = N_s/N_r$

In questo caso si è scelto il rapporto di trasformazione pari al rapporto tra il numero di spire effettive di una fase di statore N_s e di una di rotore N_r . Si intende che tali valori siano comprensivi dei coefficienti che servono a ricondurre un avvolgimento distribuito ad uno di tipo concentrato agli effetti del calcolo del flusso concatenato con ciascun avvolgimento; con la estensione all'avvolgimento trifase e l'uso conseguente dei vettori spaziali, il flusso prodotto dallo statore che viene concatenato con il rotore $\lambda_{s(r)}^s$ può essere calcolato a partire dalla (7.2.13) e vale

$$\lambda_{s(r)}^s = L_M i_s^s \quad (7.6.11)$$

In base alle definizioni appena fornite, si può ora ricondurre tale flusso ad un flusso concatenato con lo statore semplicemente dividendolo per N_r e moltiplicandolo per N_s . Così facendo si ottiene la parte di flusso prodotto e concatenato dallo statore che si trasmette al rotore; quanto prodotto dallo statore e non trasmesso al rotore è di fatto un flusso disperso, che vale:

$$L_s i_s^s - \frac{L_M i_s^s}{N_r} N_s \quad (7.6.12)$$

In modo pragmatico, è possibile definire l'*induttanza di dispersione di statore* $L_{\sigma s}$ che, interessata dalla corrente i_s^s produca tale flusso disperso:

$$L_{\sigma s} = L_s - L_m N_s / N_r \quad (7.6.13)$$

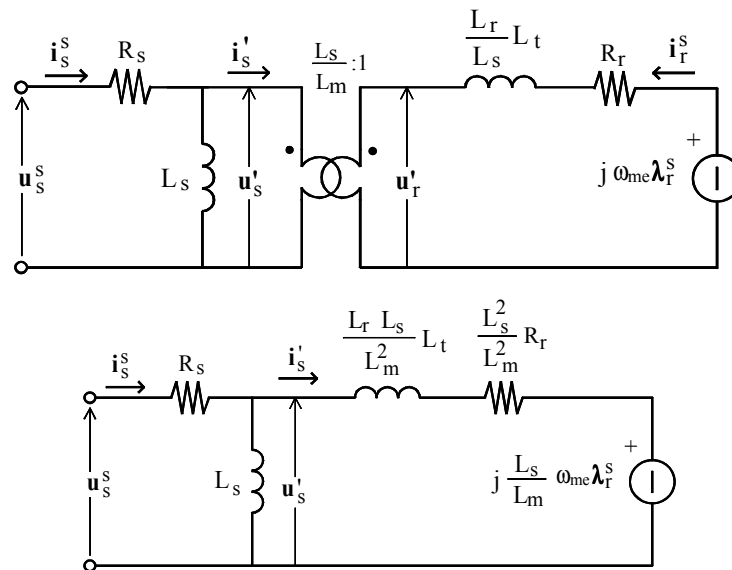


Fig.7.6.6 - Schema elettrico equivalente del motore ad induzione, con $n=L_s/L_M$

In modo del tutto analogo è possibile definire l'*induttanza di dispersione del rotore* $L_{\sigma r}$ come:

$$L_{\sigma r} = L_r - \frac{L_M}{N_s / N_r} \quad (7.6.14)$$

Ricordando le (7.6.4) è subito evidente che scegliendo $n=N_s/N_r$ le due induttanze L_1 ed L_2 assumono il preciso significato fisico di induttanze di dispersione di statore e di rotore. I circuiti elettrici equivalenti che ne derivano sono riportati nella seguente Fig.7.6.7; nella rappresentazione senza trasformatore, si sono indicate concisamente con $L'_{\sigma r}$ e R'_r i parametri di rotore moltiplicati per il quadrato del rapporto di trasformazione, senza indicarlo esplicitamente; il vettore spaziale di corrente i'_s vale i_r^s/n , con il verso indicato in figura.

Spesso all'induttanza $N_s L_m / N_r$ viene dato il nome di *induttanza principale di statore*, intendendo che quando essa è interessata dalla corrente di statore i_s^s produce il flusso concatenato che, sommato a quello disperso generato da L_{σ} , compone l'intero flusso concatenato prodotto dalle correnti statoriche $\lambda_{s(s)}^s$ (eq.7.5.2). Facendo attenzione a non travisare il significato dei termini, all'induttanza principale di statore si può associare il *flusso concatenato al traferro* prodotto dallo statore; è chiaro che un ragionamento speculare porterebbe a definire il flusso concatenato al traferro prodotto dal rotore, e la relativa induttanza principale di rotore di valore $L_m N_r / N_s$.

In regime sinusoidale, con grandezze alla pulsazione costante Ω_s , l'equazione (7.5.17) diviene¹²:

$$0 = R_r \dot{I}_r + j\Omega_s \dot{\Lambda}_r - j\Omega_{me} \dot{\Lambda}_r \quad (7.6.15)$$

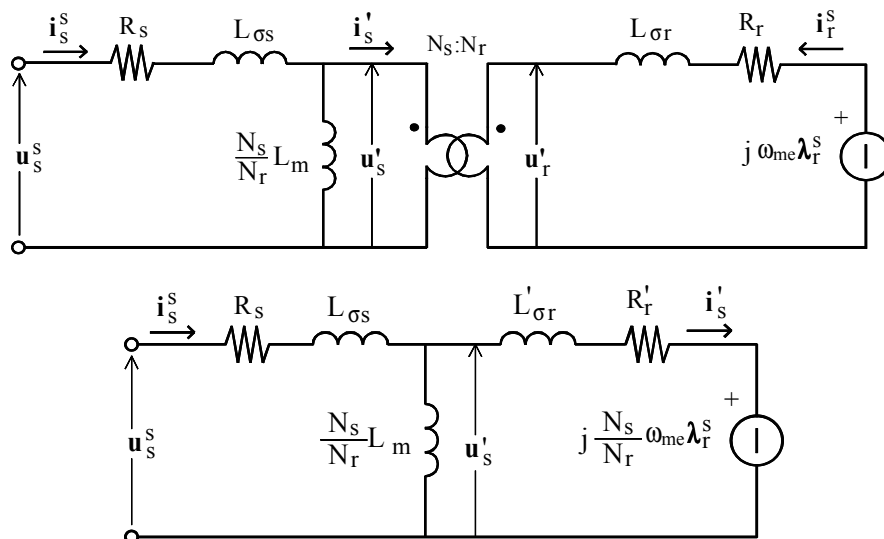


Fig.7.3.6 - Schema elettrico equivalente del motore ad induzione, con $n=N_s/N_r$

da cui

$$\dot{\Lambda}_r = \frac{R_r \dot{\Lambda}_r}{j(\Omega_{me} - \Omega_s)} \quad (7.6.16)$$

ed anche:

$$jn\Omega_{me} \dot{\Lambda}_r = \frac{jn\Omega_{me} R_r \dot{I}_r}{j(\Omega_{me} - \Omega_s)} = -\frac{\dot{I}_r}{n} n^2 R_r \frac{1-s}{s} = R'_r \frac{1-s}{s} \dot{I}_s \quad (7.6.17)$$

dove $n=N_s/N_r$ e si è definito lo scorrimento

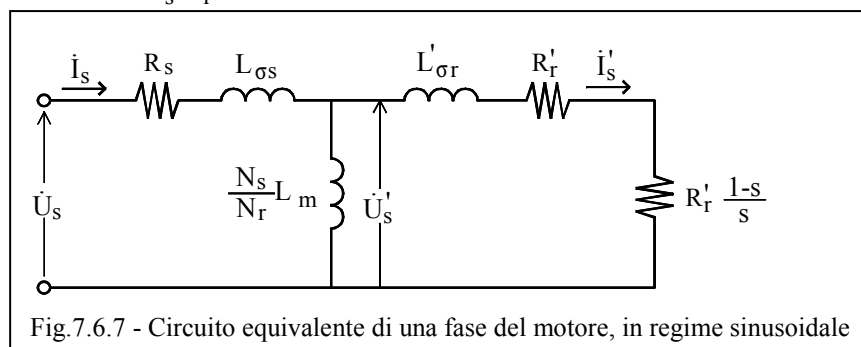


Fig.7.6.7 - Circuito equivalente di una fase del motore, in regime sinusoidale

$$s = \frac{\Omega_s - \Omega_{me}}{\Omega_s} \quad (7.6.18)$$

L'espressione (7.6.17) permette di interpretare in regime sinusoidale il generatore vettoriale di Fig.7.6.6 come una

¹² Al posto del grassetto, che è stato usato per denotare i vettori spaziali, per il regime sinusoidale si utilizzeranno lettere maiuscole sovrastate da un puntino, ad indicare che si tratta di fasori temporali. Verrà anche omesso l'apice relativo al sistema di riferimento, assumendo implicitamente che esso sia sempre solidale allo statore. La velocità meccanica e le pulsazioni elettriche verranno scritte con caratteri maiuscoli, per ricordare che si tratta di grandezze costanti.

resistenza variabile con la differenza tra la pulsazione delle grandezze statoriche e la velocità del rotore; sostituita nel circuito equivalente (ad esempio in quello senza il trasformatore) lo riduce allo schema elettrico classico del motore asincrono, come illustrato nella figura seguente:

Si può osservare come, in accordo con la (7.6.2) e la spiegazione ad essa relativa, la potenza dissipata su $R_r' (1-s)/s$ continui a rappresentare la potenza meccanica, in questo caso relativa ad una fase del motore, in regime sinusoidale.

E' ovvio che "la potenza relativa ad una fase" sia una suddivisione matematica, astratta, perchè la potenza meccanica nasce dall'interazione simultanea delle correnti di fase ed una suddivisione di questo tipo non ha senso fisico. Il concetto viene espresso solo per ricavare la potenza complessiva come "somma" delle potenze di ciascuna fase, calcolate ragionando sul circuito equivalente di Fig.7.6.7.

Ricordando che $\dot{I}'_s = -\dot{I}_r/n$ e che $R_r' = n^2 R_r$, la potenza complessivamente dissipata sulle tre fasi si può scrivere come:

$$3 \left(\frac{\dot{I}'_s}{\sqrt{2}} \right)^2 R_r' \frac{1-s}{s} = \frac{3}{2} \dot{I}_r^2 R_r \frac{1-s}{s} \quad (7.6.19)$$

Si nota che essa è nulla quando lo scorrimento è unitario, ovvero quando il rotore è sincrono con le grandezze sinusoidali di statore; il risultato era facilmente prevedibile, se si considera che solo lo scorrimento può indurre correnti nel rotore che, interagendo con quelle di statore producono coppia e quindi potenza. Essendo infatti il rotore isotropo e non alimentato direttamente, il meccanismo di conversione elettromeccanica che interviene è necessariamente quello tipico dei sistemi ad induzione.