

CAPITOLO 1

Motore a corrente continua ad eccitazione indipendente

1.1 - Struttura e principio di funzionamento

Una rappresentazione schematica della struttura di un motore a corrente continua a due poli è mostrata in Fig.1.1.1. Essa comprende una *parte fissa (statore)* che costituisce l'*induttore* della macchina (la struttura che produce il *campo magnetico principale*), dotata dei *poli induttori (o poli principali)*¹ su cui sono avvolte le *bobine di eccitazione* che, nell'insieme, formano l'*avvolgimento di eccitazione (o induttore o di campo)*. La *corrente di eccitazione* è indicata in figura con i_e .

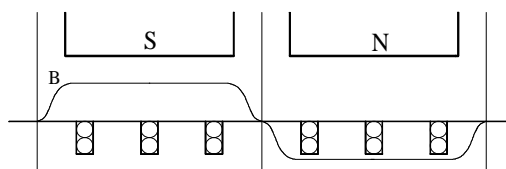
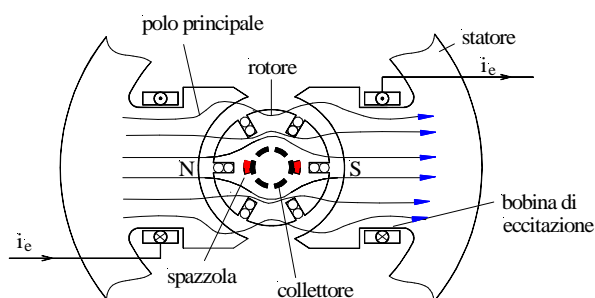
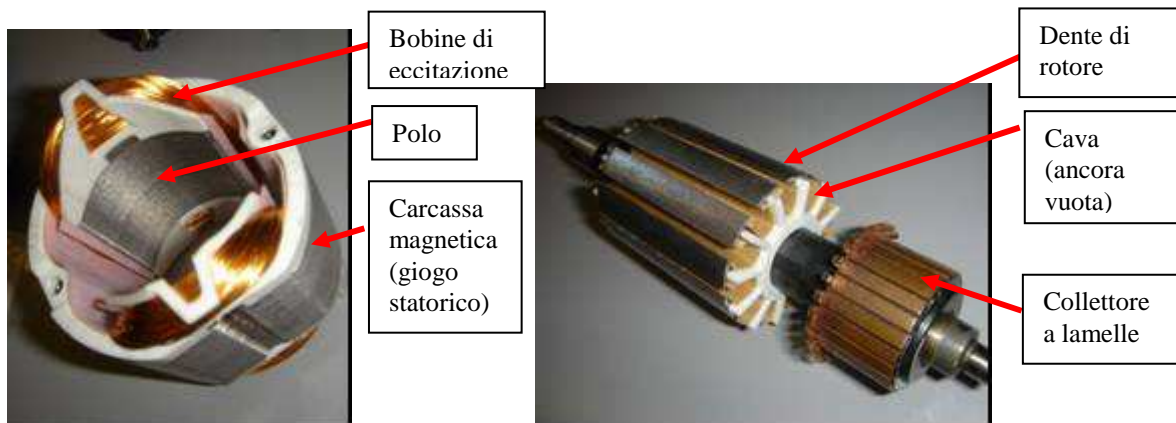


Fig.1.1.1 - Rappresentazione schematica di un motore c.c. a 2 poli

Fig.1.1.2 - Andamento di B lungo il traferro, a vuoto ($i_a=0$)

Esiste quindi una *parte rotante (rotore)* che rappresenta l'*indotto* della macchina il cui avvolgimento (*armatura*) ha i suoi conduttori, detti *conduttori attivi*, collocati entro canali (*cave*) ricavati lungo le generatrici del cilindro rotorico. L'armatura è alimentata dalla corrente i_a inviata attraverso contatti fissi (*spazzole*) striscianti su un sistema di *lamelle* solidale con il rotore (*collettore*). Statore e rotore sono separati da una sottile corona d'aria che prende il nome di *traferro*.

Una rappresentazione fotografica di un motore del tipo schematizzato in Fig. 1.1.1 è mostrata nelle immagini sottostanti.



¹ In figura la macchina ha una coppia di poli; nella pratica le macchine a corrente continua vengono realizzate anche e spesso con più di una coppia polare, con i poli che si succedono con polarità alterne. Anche con più coppie polari il principio di funzionamento resta quello illustrato in questo paragrafo.

Per un miglior funzionamento della macchina a corrente continua possono esistere altri due componenti: i *poli ausiliari* (o di commutazione) disposti sull'asse interpolare e gli *avvolgimenti di compensazione*, distribuiti sulla scarpa polare dei poli principali, affacciati all'armatura. Essi sono per il momento ignorati per essere richiamati più avanti nel capitolo.

1.1.1 Funzionamento del sistema induttore

Quando una corrente i_e è inviata negli avvolgimenti di eccitazione, mentre i conduttori di indotto non sono sede di correnti (funzionamento a vuoto), si instaura nella macchina un campo magnetico principale, le cui linee di campo sono esemplificate in Fig.1.1.1.

Tale campo genera il *flusso induttore* ϕ che attraversa il traferro ed il rotore e si richiude nello statore. La distribuzione lungo il traferro della componente radiale dell'induzione che presenta, in virtù della sagomatura dei poli stessi, l'andamento rappresentato in Fig. 1.1.2.

Assumendo la *convenzione di segno degli utilizzatori*, l'avvolgimento di eccitazione è retto dall'equazione dinamica

$$u_e = R_e i_e + \frac{d\lambda_e}{dt} \quad (1.1.1)$$

ove λ_e è il flusso concatenato. Se N_e è il numero di spire complessivo dell'avvolgimento di eccitazione, trascurando i flussi dispersi vale $\lambda_e = N_e \phi$, ove ϕ (*flusso induttore*) è il flusso del campo induttore principale che è funzione della corrente di eccitazione i_e in accordo con la *caratteristica di magnetizzazione* $\phi(i_e)$ di Fig. 1.1.3 (tracciata per i soli valori positivi di i_e)². Il circuito di eccitazione ha pertanto la natura di un bipolo resistivo-induttivo passivo e non lineare.

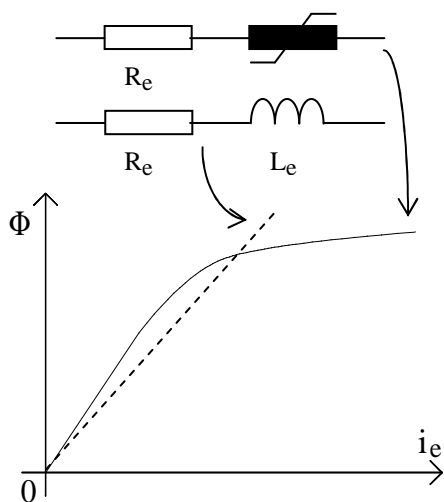


Fig.1.1.3 - Curva di magnetizzazione

Per comodità di trattazione, si accetta a volte di approssimare la caratteristica di magnetizzazione, fino al flusso massimo di interesse, con una retta (trascurando l'effetto della saturazione magnetica), come quella mostrata a tratteggio in fig. 1.1.3, in modo che

$$\phi(i_e) \cong K_\phi i_e \quad (1.1.2)$$

Di conseguenza la (1.1.1) può essere riscritta nella forma

$$u_e = R_e i_e + L_e \frac{di_e}{dt} \quad (1.1.3)$$

ove L_e è l'induttanza del circuito, costante e pari a $N_e K_\phi$, che consente di trattare il circuito di campo come una bipolo resistivo-induttivo passivo e lineare.

1.1.2 Funzionamento del sistema indotto in quiete

² In presenza di flussi dispersi si può ancora usare la relazione soprascritta assumendo che N_e sia un coefficiente un po' maggiore del reale numero di spire di eccitazione.

Per descrivere il funzionamento del sistema indotto, si faccia riferimento alla Fig.1.1.4, ove il semplice rotore con 6 cave e 12 conduttori è rappresentato con maggior dettaglio ed è supposto, per il momento, fermo. A destra ne è mostrata una immagine fotografica

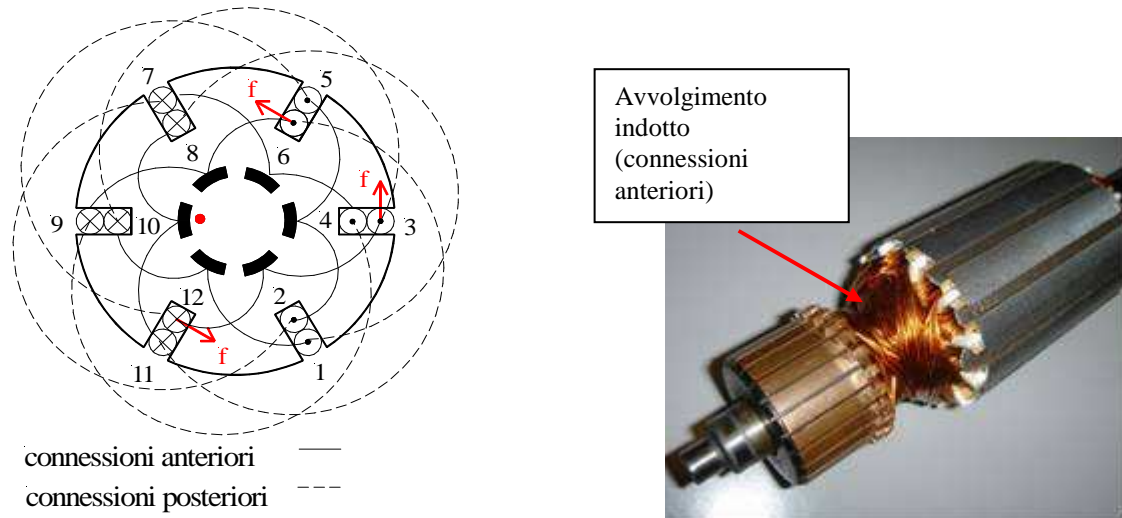


Fig.1.1.4 - Schema di indotto a 6 cave

Si immagini che il conduttore attivo 3 di figura sia sede di una corrente positiva i con il verso indicato. Se B è l'induzione radiale al traferro nella posizione occupata dal conduttore in esame, su di esso verrà ad agire la forza tangenziale mostrata in figura, di intensità $f=Bli$ essendo l lo sviluppo assiale del conduttore.

Se la stessa corrente i percorre anche tutti gli altri conduttori sotto il polo S e, con il verso contrario come evidenziato in figura, anche quelli sotto il polo N, su tutti verranno ad agire forze tangenziali di versi concordi (alcune indicate in figura), proporzionali al valore dell'induzione radiale al traferro nella posizione occupata dai conduttori stessi. In queste condizioni il rotore è sottoposto ad una *momento torcente* (o semplicemente *coppia*) risultante m diverso da zero che tende a metterlo in rotazione. Opportune connessioni fra i diversi conduttori e l'alimentazione degli stessi attraverso contatti striscianti spazzole-lamelle fanno sì che la distribuzione delle correnti rispetto ai poli sia sempre quella di Fig.1.1.4 qualunque sia la posizione del rotore sicché la coppia prodotta per una data corrente mantiene sempre lo stesso valore e segno. Per comprendere come ciò sia possibile si faccia riferimento alla schematizzazione di Fig. 1.1.5 che illustra, sviluppato e disteso su un piano, l'avvolgimento indotto della macchina di Fig. 1.1.4. Sulla stessa figura sono pure mostrati i collegamenti fra le lamelle del collettore e l'avvolgimento indotto, nonché la posizione che devono avere le spazzole.

Si riconosce che l'avvolgimento d'indotto collega tra loro i diversi conduttori attivi così da formare un *avvolgimento chiuso*, condizione essenziale per garantire la necessaria *simmetria rotazionale* all'avvolgimento. Le stesse connessioni sono mostrate anche in Fig.1.1.4. La corrente di armatura i_a inviata e prelevata attraverso le spazzole si suddivide nelle due vie interne identiche, ciascuna formata da sei conduttori, che si possono individuare percorrendo l'indotto da una spazzola all'altra. Si riconosce altresì che tutti i conduttori che giacciono sotto lo stesso polo sono percorsi da correnti equiverse, anche se essi appartengono per metà ad una delle due vie interne e i rimanenti all'altra³.

³ Nelle macchine multipolari i criteri di realizzazione dell'avvolgimento di armatura sono molteplici e portano a configurazioni che possono avere più coppie di spazzole e nelle quali la corrente di armatura si suddivide in più di due vie interne, sempre comunque identiche fra di loro.

Spostando il rotore di un passo alle cave (sesto di giro, per esempio in senso antiorario in Fig.1.1.4, verso destra in Fig.1.1.5, corrispondente ad un movimento verso sinistra delle spazzole e della proiezione dei poli) rimane inalterata la distribuzione delle correnti sotto ogni polo. In particolare nelle coppie di conduttori 11,12 e 5,6 si ha un'inversione della corrente ed essi prendono il posto che già era delle coppie 1,2 e 7,8 rispettivamente.

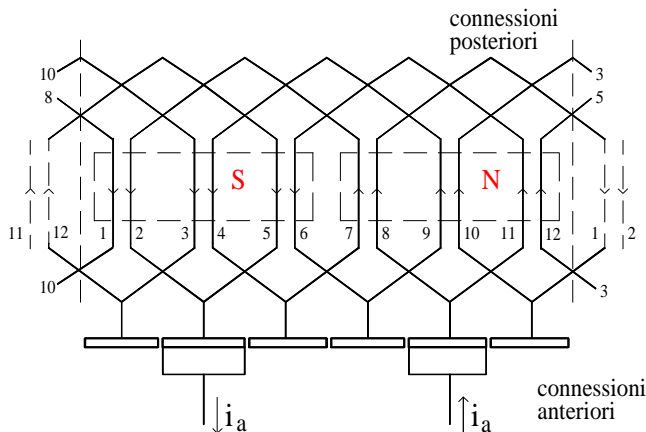


Fig.1.1.5 - L'avvolgimento indotto sviluppato in un piano

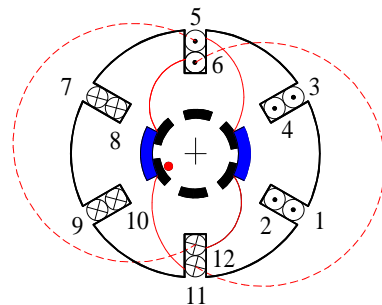


Fig.1.1.6 - Spire in commutazione

Durante ogni spostamento di questo tipo si ha una *commutazione* della corrente delle spazzole da una lamella alla successiva, che riporta le condizioni operative della macchina del tutto equivalenti a quelle di partenza, con conseguente costanza della coppia prodotta.

Posizionando invece il rotore in una posizione intermedia, come rappresentato in Fig.1.1.6, ogni spazzola alimenta due lamelle adiacenti, con correnti proporzionali alle relative superfici di contatto⁴.

Durante la commutazione si ha allora una graduale riduzione della corrente nelle lamelle uscenti dalle spazzole, una graduale crescita in quelle entranti mentre nelle due *spire in commutazione* (formate dai conduttori 11,6 e 12,5) si ha un graduale rovesciamento di corrente la quale passa per lo zero nel momento in cui le spire in questione transitano per il piano interpolare (*piano di commutazione o delle spazzole*) ove l'induzione del campo induttore è nulla.

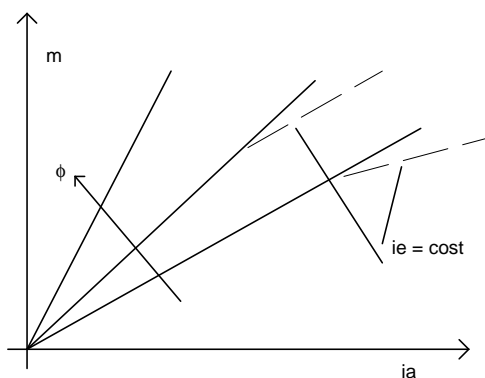


Fig.1.1.7 - Caratteristica elettromeccanica

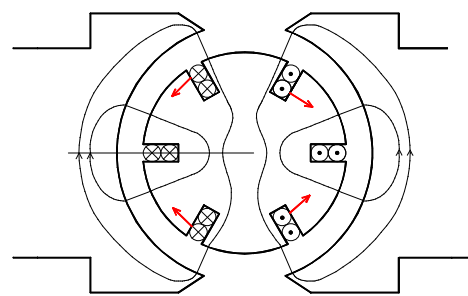


Fig.1.1.8 - Campo di reazione d'indotto

⁴ Ciò è vero se si suppone che la resistenza di contatto spazzola-lamella sia dominante rispetto alle altre resistenze in gioco.

Se il numero di cave è sufficientemente alto, si può senz'altro assumere che anche durante la commutazione si venga a produrre sul rotore sempre lo stesso coppia. Essa sarà proporzionale all'intensità delle correnti nei conduttori, e quindi ad i_a , e all'induzione media sotto ciascun polo, e quindi a ϕ , e potrà in ultima analisi essere espressa con la

$$m = K_\tau \phi i_a \quad (1.1.4)$$

ove K_τ è il *coefficiente di momento torcente o di coppia* che dipende dal tipo di avvolgimento e dal numero di conduttori attivi.

La (1.1.4) è graficamente rappresentata a tratto continuo dalla *caratteristica elettromeccanica di coppia a flusso costante* di Fig.1.1.7.

Se il flusso induttore è costante, essa è una retta con inclinazione proporzionale al flusso stesso. La deformazione manifestata a corrente di eccitazione costante è spiegata nel prossimo paragrafo.

1.1.3 Reazione d'indotto

La corrente di armatura, che si suddivide e distribuisce nei conduttori attivi collocati nelle varie cave, produce a sua volta un campo magnetico (*campo di reazione di indotto o campo distorcente*), che si sovrappone a quello induttore modificando la distribuzione dell'induzione al traferro rispetto a quella che si ha a vuoto: *distorsione a carico del campo al traferro*. Le linee di flusso del campo di reazione d'indotto sono schematizzate in Fig. 1.1.8.

La distribuzione delle correnti di indotto e le linee del campo di reazione evidenziano che l'avvolgimento di indotto è equivalente ad un solenoide con l'asse magnetico nel piano che contiene le spire in commutazione e quindi in quadratura con l'asse del flusso induttore. Fra i due circuiti, induttore e indotto (quest'ultimo con piano di commutazione in posizione interpolare) non sussiste perciò alcun mutuo accoppiamento induttivo.

L'esame delle forze elementari agenti sui conduttori di Fig. 1.1.8 immersi nel campo di reazione d'indotto (alcune sono indicate in figura) mostra anche che metà di esse produce una coppia in un certo segno mentre l'altra metà produce una coppia identica ma di segno opposto, con coppia risultante quindi nulla. Si conclude che la coppia non dipende dal campo di reazione d'indotto ma solo dal campo induttore e perciò resta valida la (1.1.4)

Un esame più attento del circuito magnetico mostra che il campo di reazione di indotto causa di fatto una riduzione del flusso per polo. Si osserva infatti che sovrapponendo la reazione d'indotto al campo induttore si ha un aumento dell'induzione magnetica al traferro sotto metà espansione polare e una riduzione sotto l'altra metà. Se il circuito magnetico fosse esente dal fenomeno della saturazione magnetica, aumento e diminuzione sarebbero uguali e nessuna variazione si avrebbe sul valor medio dell'induzione al traferro sotto ciascun polo, ovvero sul valore del flusso per polo ed anche, attraverso questo, sulla coppia sviluppata ad una data corrente. La saturazione delle scarpe polari fa sì invece che la diminuzione sia più marcata dell'aumento cosicché si ha, a carico, un flusso per polo inferiore (a parità di corrente di eccitazione) di quello a vuoto. Questo giustifica l'andamento a tratteggio della *caratteristica elettromeccanica di coppia a i_e costante* disegnato in Fig. 1.1.7.

1.1.4 Funzionamento del sistema indotto in moto

Se il rotore possiede una velocità angolare ω , in ogni conduttore attivo è indotta una f.e.m. elementare proporzionale al valore B dell'induzione radiale al traferro nel punto ove giace il conduttore, e alla velocità periferica di rotazione secondo la relazione $e = Blv$. In presenza di una velocità positiva, cioè nel verso delle coppie positive (secondo la *convenzione di segno dei motori*), i versi secondo i quali agiscono le f.e.m. elementari dovute al flusso induttore sono mostrati in Fig.1.1.9.

Da un confronto con la Fig.1.1.4, ove sono indicati i versi positivi delle correnti, si deduce che tali f.e.m. per come sono state orientate sono più propriamente forze controelettromotrici.

La f.e.m. di armatura e_a che si manifesta fra le spazzole si ottiene come somma delle f.e.m. elementari dei conduttori che si incontrano percorrendo l'avvolgimento indotto dal morsetto negativo a quello positivo lungo una delle vie interne che esso presenta. Con l'ausilio della Fig.1.1.5 si trova che tali f.e.m. elementari sono tutte concordi fra di loro e nelle due vie interne poste in parallelo fra le spazzole si manifestano uguali f.e.m. risultanti. La f.e.m. totale nel circuito chiuso di indotto è pertanto nulla, condizione essenziale per non causarvi una corrente di circolazione.

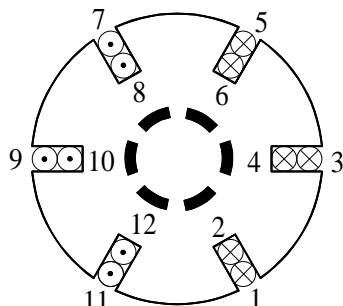


Fig.1.1.9 - Versi delle f.e.m. elementari dovute al flusso induttore

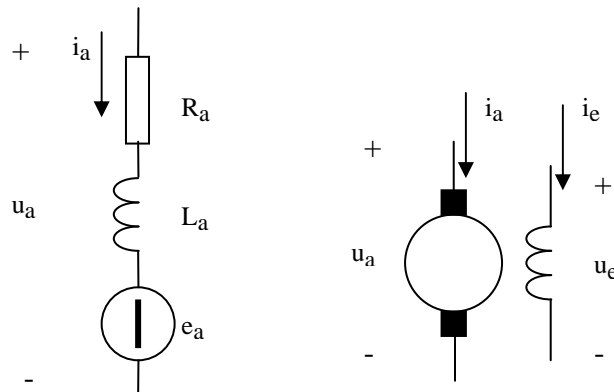


Fig.1.1.10 - Circuito di armatura e rappresentazione simbolica di una macchina a corrente continua

La f.e.m. di armatura disponibile alle spazzole sarà proporzionale alla velocità periferica del rotore, e quindi a quella di rotazione ω , e all'induzione media sotto ciascun polo, e quindi a ϕ , e potrà in ultima analisi essere espressa con la

$$e_a = K_e \phi \omega \tag{1.1.5}$$

ove K_e è la *coefficiente di f.e.m.* che dipende dal tipo di avvolgimento e dal numero di conduttori attivi.

Durante la rotazione vengono a cambiare i conduttori attivi che sono in serie nelle vie interne dell'avvolgimento fra una spazzola e l'altra, ma la f.e.m. risultante rimane invariata.

La (1.1.5) è stata dedotta riferendosi al solo campo induttore. Essa è quindi senz'altro corretta nel *funzionamento a vuoto* ossia in assenza di corrente di armatura. In presenza di quest'ultima invece si ha anche il campo di reazione di indotto e ciascuna f.e.m. elementare è legata all'induzione risultante al traferro piuttosto che a quella a vuoto solamente. Per dimostrare che la (1.1.5) resta valida anche nel *funzionamento a carico*, ossia in presenza di corrente di armatura, basta riconoscere, con l'ausilio di Fig.1.1.5 e di Fig.1.1.8 che le f.e.m. elementari lungo ciascuna via interna e dovute al campo di reazione di indotto sono per metà di un verso (p.e. concordi con le correnti) e per l'altra identica metà di verso contrario, dando risultante nulla. Il campo di reazioni d'indotto produce perciò una f.e.m. risultante fra le spazzole nulla (così come è la f.e.m. totale nel circuito chiuso di indotto) e resta quindi valida la (1.1.5).

Più precisamente si dovrebbe tener conto che, come già discusso, la reazione d'indotto causa un'attenuazione del flusso per polo dovuta ad una parziale saturazione delle scarpe polari. Di conseguenza a carico si ha un calo della f.e.m. di armatura per una data corrente di eccitazione, così come succede per la coppia.

Durante la rotazione dell'indotto, ogni qualvolta una spazzola passa da una lamella alla successiva essa viene a formare un momentaneo cortocircuito di una spira dell'avvolgimento d'indotto attraverso le due lamelle, come già discusso e mostrato nella Fig. 1.1.6.

Nel funzionamento a vuoto ciò tuttavia non provoca alcuna corrente di circolazione all'interno della spira in cortocircuito in quanto essa non è sede di f.e.m., essendo i suoi conduttori attivi disposti esattamente sul piano interpolare ove l'induzione magnetica radiale è nulla (Fig.1.1.6). Significativamente diversa è la situazione a carico nella quale la reazione di indotto produce un'induzione magnetica proprio là dove giace la spira in commutazione, ed essa ha l'effetto di produrvi una f.e.m.

Il par.1.2 fornirà alcune indicazioni sulle problematiche connesse alla distorsione del campo e alla commutazione a carico.

Un avvolgimento come quello delle macchine a corrente continua qui sinteticamente illustrato gode della proprietà di essere sede di una fem mozionale (proporzionale alla velocità di rotazione, cfr. (1.1.5)) e di produrre un campo di reazione d'indotto spazialmente fisso anche se l'indotto è in moto (cfr. Fig. 1.1.8). Esso prende il nome di *avvolgimento pseudostazionario*.

La fem indotta di armatura è abbinata ad un assorbimento di potenza pari a

$$p = e_a i_a \quad (1.1.6)$$

Avendo adottato la convenzione di segno dei motori, il prodotto

$$p = m\omega \quad (1.1.7)$$

fornisce il valore della potenza meccanica sviluppata dalla macchina.

Le potenze (1.1.6) e (1.1.7) devono essere evidentemente coincidenti in quanto forza elettromotrice e coppia rappresentano la manifestazione elettrica e meccanica dello stesso fenomeno, quello della *conversione elettromeccanica dell'energia* che avviene all'interno della macchina elettrica.

Dall'uguaglianza della (1.1.6) con la (1.1.7) e utilizzando le (1.1.4) e (1.1.5) si ricava che

$$K_\tau = K_e \quad (1.1.8)$$

ed in seguito si farà pertanto uso solo di K_e .

Per completare la descrizione elettrica dell'indotto occorre tener conto anche della resistenza propria dell'avvolgimento e della sua induttanza. L'equazione elettrica d'armatura sarà pertanto

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \quad (1.1.9)$$

a cui corrisponde il circuito di armatura di Fig. 1.1.10.

Le relazioni (1.1.1), (1.1.4), (1.1.5) e (1.1.9) descrivono il comportamento dinamico del motore. Ad esse deve essere aggiunta l'equazione meccanica del carico che in generale sarà

$$m = J \frac{d\omega}{dt} + m_L(t, \omega) \quad (1.1.10)$$

dove J è il momento d'inerzia totale riferito all'albero motore e m_L è la coppia di carico, in generale dipendente sia dalla velocità del motore che dal tempo.

Alle equazioni sopra scritte corrisponde lo schema a blocchi di Fig.1.1.11, valido *nel dominio del tempo*, anche se alcuni blocchi (lineari) sono contrassegnati con la funzione di trasferimento (f.d.t.) in s che li descrive.

Per le interessanti comparazioni che potranno essere fatte con altre macchine elettriche, è utile tracciare anche lo schema a blocchi del motore a corrente continua alimentato a corrente impressa. Esso si ottiene da quello di Fig.1.1.11 assumendo direttamente come grandezza d'ingresso la corrente di armatura piuttosto che la tensione. Se inoltre si considerano le equazioni lineari approssimate per il circuito di campo lo schema a blocchi risultante è quello di Fig.1.1.12.

Esso evidenzia come la corrente di armatura consenta di agire direttamente sulla coppia, mentre la tensione di campo agisce sul flusso induttore attraverso la costante di tempo del circuito di eccitazione.

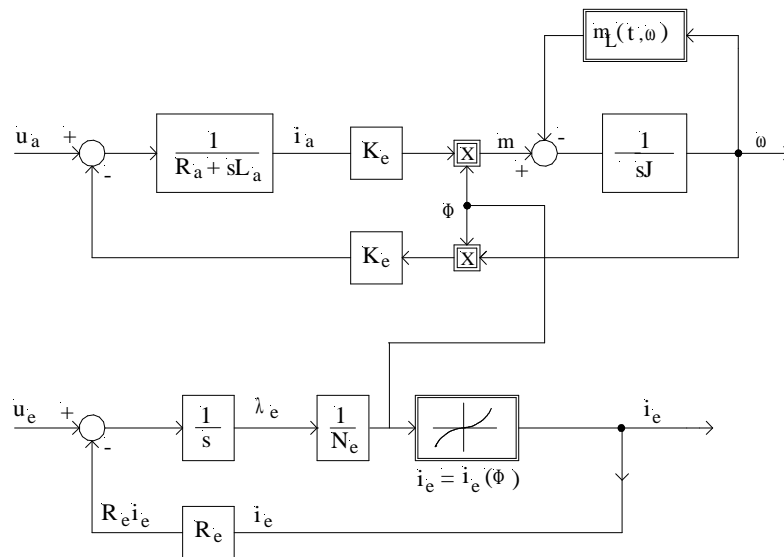


Fig.1.1.11 - Schema a blocchi del motore c.c., nel dominio del tempo

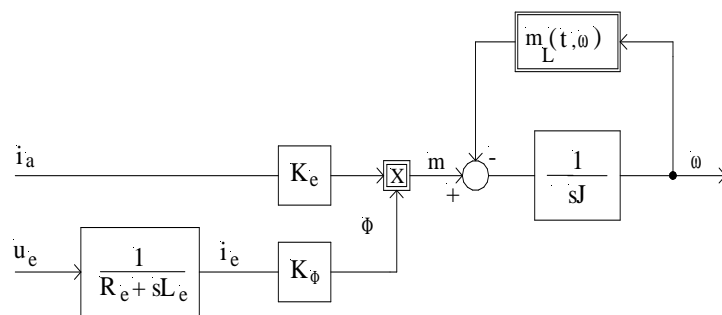


Fig.1.1.12 - Schema a blocchi del motore c.c a corrente impressa

1.2 - Il fenomeno della commutazione

Prima di individuare e descrivere le diverse modalità di controllo del motore a corrente continua ad eccitazione indipendente, si esaminano alcuni suoi aspetti peculiari e connessi con il processo di commutazione della corrente da una lamella all'altra sotto le spazzole. Tali aspetti hanno alcune conseguenze anche sulle prestazioni di un azionamento con motore a corrente continua.

Ad ogni passaggio di una coppia di lamelle sotto una spazzola, nella spira che fa capo a quelle due lamelle (in pratica più esattamente nella matassa (di spire) i cui capi sono collegati alle lamelle) si manifesta un'inversione di corrente. Se tale inversione avviene con andamento lineare nel tempo, nell'intervallo in cui una lamella si sostituisce alla precedente sotto la spazzola, la densità di corrente sulle superfici di contatto spazzola-lamella rimane costante durante tutta la commutazione (commutazione lineare). Questo accade quando l'inversione di corrente è governata dalla sola caduta di tensione dovuta alla resistenza spazzola-lamella, supposta inversamente proporzionale alla superficie di contatto, e nessuna altra tensione o f.e.m. appare nella spira in questione.

Qualora ciò non si verifichi si determina un addensamento della corrente su una delle due lamelle in contemporaneo contatto con la spazzola, con conseguente scintillio al momento del distacco, riscaldamento e deterioramento del collettore e delle spazzole stesse. E' pertanto di interesse individuare le tensioni e le f.e.m. che sono presenti nella spira in commutazione e i fattori che influenzano lo svolgersi della commutazione stessa. Le principali tensioni e f.e.m. sono:

- la tensione resistiva dovuta alla resistenza propria della spira;
- la f.e.m. indotta per autoinduzione dalle variazioni di corrente nella spira;
- la f.e.m. indotta per mutua induzione dalle variazioni di corrente in altre spire;
- la f.e.m. indotta per variazioni del flusso induttore;
- la f.e.m. indotta nei conduttori attivi della spira a causa del moto di rotazione degli stessi nel campo al traferro (non nullo a causa della distorsione prodotta dalla reazione d'indotto).

Occorre osservare che le f.e.m. di auto e mutua induzione sono dovute non solo alla inversione della corrente nella spira in commutazione, ma anche alle variazioni della corrente ai morsetti della macchina che si manifestano per esempio durante il funzionamento in regime dinamico o a causa di una alimentazione non perfettamente costante nel tempo come quella ottenuta in uscita ai convertitori statici.

Per quanto riguarda la f.e.m. indotta da variazioni del flusso induttore si può notare che la spira in commutazione, avendo i suoi lati attivi disposti sul piano interpolare (cfr. Fig. 1.1.6), concatena il totale flusso per polo. Le variazioni del flusso induttore che possono manifestarsi, per esempio, quando si esegue il controllo della coppia della macchina agendo sulla corrente di eccitazione, inducono una f.e.m. nella spira cortocircuitata dalle spazzole.

I fattori operativi che influenzano la commutazione sono pertanto:

- l'intensità della corrente di armatura: maggiore è la corrente di armatura, maggiori sono le f.e.m. appena ricordate e la reazione d'indotto;
- la velocità di rotazione: maggiore è la velocità di rotazione, minore è il tempo entro il quale la commutazione deve completarsi con conseguente maggiore intensità delle f.e.m. indotte nella spira in commutazione;
- l'intensità del flusso induttore: minore è il flusso induttore più marcata è la distorsione del campo al traferro per reazione d'indotto;
- lo stato del collettore e delle spazzole: la perdita di isolamento fra le lamelle, la scarsa pressione di contatto, la perdita di allineamento fra le file delle spazzole e le lamelle nonché le vibrazioni, le condizioni ambientali di elevate umidità o temperatura o la presenza di polveri o vapori, possono tutti peggiorare la commutazione.

Gli interventi che si operano per migliorare la commutazione sono:

- uso di spazzole ad alta resistenza (per piccole o piccolissime macchine);

- l'installazione dei *poli ausiliari* di commutazione (per medie e grandi macchine). Questi sono poli disposti sul piano che contiene la spira in commutazione (*piano di commutazione*) ed eccitati dalla stessa corrente di armatura. La loro funzione è quella di produrre nella zona del traferro occupata dai conduttori attivi della spira in commutazione un'opportuna induzione radiale così da generare nella spira una f.e.m. che compensa e cancella le altre f.e.m. proporzionali alla corrente. Per una buona efficacia dei poli ausiliari, è necessario che essi producano un'induzione nel sottostante traferro proporzionale alla corrente di armatura. Si dovrà quindi evitare che essi risentano della saturazione magnetica (ampia sezione) e inoltre saranno laminati per evitare le correnti parassite nel loro nucleo, le quali in regime dinamico sarebbero causa di ritardo fra la corrente di armatura e il flusso prodotto.
- l'impiego di *avvolgimenti compensatori* (per medie e grandi macchine). Gli avvolgimenti compensatori sono disposti in modo distribuito nelle scarpe polari in cave simili a quelle di indotto. Percorsi dalla corrente di armatura essi generano una f.m.m. al traferro uguale ed opposta a quella della reazione d'indotto, limitando così la distorsione dell'induzione al traferro ed inoltre, riducendo l'induzione in corrispondenza del piano di commutazione;
- l'inserzione di induttanze in serie alla macchine per contenere le armoniche di corrente entro limiti accettabili. Ciò al fine di ridurre le f.e.m. autoindotte per effetto delle variazioni della corrente di armatura.

1.3 - Limiti e regioni di funzionamento del motore c.c. ad eccitazione indipendente

Le tensione e le correnti che possono essere applicate ad un motore in corrente continua devono rimanere entro specificati limiti che, da un lato, sono costituiti dai valori nominali o di targa del motore, oltre i quali i suoi avvolgimenti risulterebbero eccessivamente sollecitati per un corretto e prolungato funzionamento, dall'altro sono costituiti dagli analoghi valori nominali del sistema di alimentazione. Qui di seguito si farà l'ipotesi che i più restrittivi siano i limiti dovuti ai valori nominali del motore.

Per determinare i corrispondenti limiti e le regioni di funzionamento del motore a corrente continua ad eccitazione indipendente si fa riferimento al suo funzionamento a regime (stazionario). Si intende funzionamento a regime quello in cui le grandezze u , i , ϕ ed ω sono costanti e pari a U , I , Φ ed Ω rispettivamente.

Ad esempio, per le limitazioni citate, la corrente di armatura I_a dovrà avere ampiezze in valore assoluto non superiori al valore nominale I_{aN} oltre il quale le perdite Joule che si producono nel circuito indotto porterebbero la temperatura di regime di questo componente ad assumere valori inaccettabili per i materiali isolanti ivi presenti.

Solo per brevi intervalli di tempo si ammettono correnti maggiori della nominale, sfruttando l'inerzia termica del rotore: limite di corrente nel *funzionamento intermittente*. Tale limite non deve comunque superare la capacità di commutazione del sistema spazzole-collettore; il suo valore, unitamente al tempo per cui è applicabile, fanno parte dei dati di targa del motore.

Anche la tensione alle spazzole deve rimanere entro il suo valore nominale U_{aN} , che dipende dai criteri di isolamento adottati e dall'esigenza di rispettare i limiti di funzionamento del collettore.

Infine anche per il circuito di campo saranno definite la corrente nominale I_{eN} e la corrispondente tensione nominale U_{eN} . Il progettista del motore avrà evidentemente coordinato tali valori nominali in modo che il loro raggiungimento sia contemporaneo e in tali condizioni si produca il flusso nominale Φ_N per il quale è stato dimensionato il circuito magnetico del motore.

In sintesi i limiti di funzionamento a regime si potranno esprimere con le:

$$\begin{aligned}
 |I_a| &\leq I_{aN} && \text{limite di corrente} \\
 |U_a| &\leq U_{aN} && \text{limite di tensione} \\
 |\Phi| &\leq \Phi_N && \text{limite di flusso induttore}
 \end{aligned}
 \tag{1.3.1}$$

I limiti sopra esposti producono corrispondenti limiti di coppia e di velocità. Tutto ciò può essere studiato ed evidenziato con l'ausilio del piano Φ - I_a , rappresentato in Fig.1.3.1, tracciato per i soli valori positivi del flusso, in accordo con le condizioni operative usuali.

Sul piano si possono dapprima tracciare i *limiti di corrente di armatura* corrispondenti alle due linee orizzontali alle ordinate $+I_{aN}$ e $-I_{aN}$, al di sopra e di sotto delle quali non si può operare.

Per quanto riguarda il *limite di tensione* esso si può esprimere in funzione di I_a e Φ sfruttando le (1.1.5) e (1.1.9) scritte a regime, cioè ponendo a zero il termine derivativo, ottenendo

$$|U_a| = |R_a I_a + K_e \Phi \Omega| \leq U_{aN} \tag{1.3.2}$$

Essendo la caduta resistiva sempre molto inferiore alla tensione nominale del motore, essa può essere trascurata nella (1.3.2), giungendo quindi facilmente a

$$\Phi \leq \frac{U_{aN}}{K_e |\Omega|} \tag{1.3.3}$$

ove ancora si è assunto $\Phi > 0$.

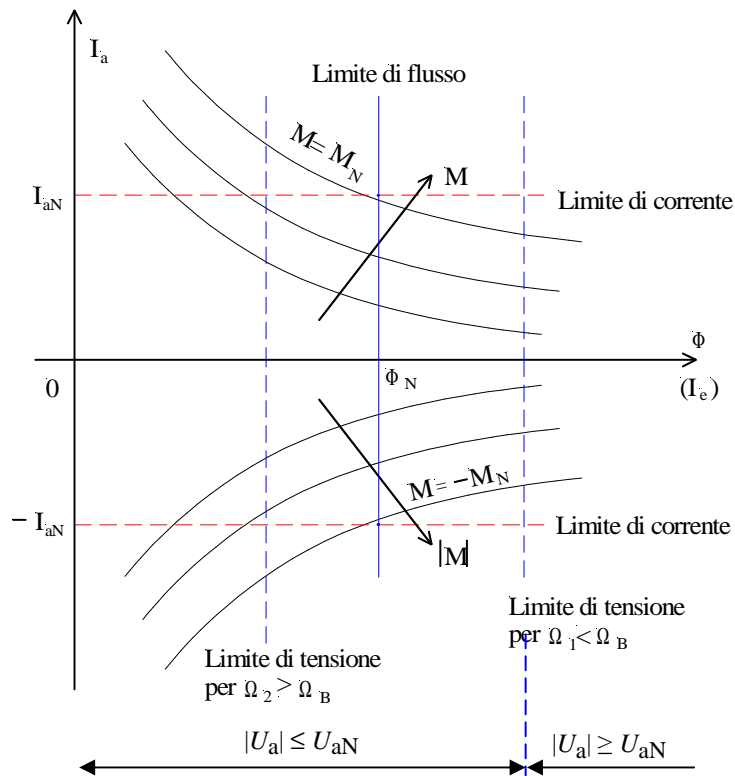


Fig.1.3.1 - Limiti di tensione e di corrente d'armatura e di flusso induttore

Il limite espresso dalla (1.3.3), è una retta verticale sul piano Φ - I_a , la cui ascissa è espressa dal secondo membro della (1.3.3) stessa. Si riconosce che il limite di tensione dipende dalla velocità del motore come mostrato in Fig.1.3.1. Data una certa velocità, i punti del piano alla sinistra del

limite di tensione corrispondono al funzionamento a tensioni di armatura (in valore assoluto) inferiori alla nominale, mentre quelli a destra si riferiscono a tensioni maggiori della nominale, come esemplificato per la velocità Ω_1 in Fig. 1.3.1. L'uguaglianza $|U_a| = U_{aN}$ si ha per il funzionamento esattamente in un punto sul limite di tensione. Il semipiano non consentito per il funzionamento sarà pertanto, per ciascuna velocità, quello a destra del limite di tensione tracciato per quella velocità.

Esiste un valore di velocità per il quale la (1.3.3) coincide con il *limite di flusso induttore* espresso dalla terza delle (1.3.1). Esso prende il nome di *velocità base* e risulta dato da

$$\Omega_B = \frac{U_{aN}}{K_e \Phi_N} \quad (1.3.4)$$

Per velocità inferiori alla velocità base, come Ω_1 di Fig.1.3.1, il limite di tensione è meno restrittivo di quello di flusso. Ciò significa che dovendo rispettare il limite di flusso, la tensione non raggiunge il suo valore nominale. Per velocità invece superiori alla velocità base, come Ω_2 in figura, il limite di tensione è più severo di quello di flusso e dovrà essere osservato riducendo opportunamente il valore di flusso nel motore.

Per individuare quale flusso induttore convenga produrre nel motore, fra i valori ammessi dai limiti appena discussi, è opportuno tracciare sul piano Φ - I_a anche le *curve a coppia costante* che, per la (1.1.4) valida ovviamente anche a regime, sono delle iperboli, come mostra ancora la Fig.1.3.1.

Data una certa corrente di armatura, si riconosce che il motore produce la massima coppia possibile quando si impone il massimo flusso induttore ammissibile. La conseguenza di tale deduzione è che per velocità inferiori alla velocità base la macchina lavorerà a flusso costante e pari al suo flusso nominale rendendo disponibile sempre la coppia nominale, che si ottiene con corrente di armatura nominale. La regione di funzionamento con velocità inferiori alla velocità base prende per questo il nome di *regione a coppia limite (o disponibile) costante* o *a flusso costante*. Essa è rappresentata sul piano Ω - M da un rettangolo centrato attorno all'origine degli assi come mostra la Fig.1.3.2., entro il quale cadrà il punto di funzionamento.

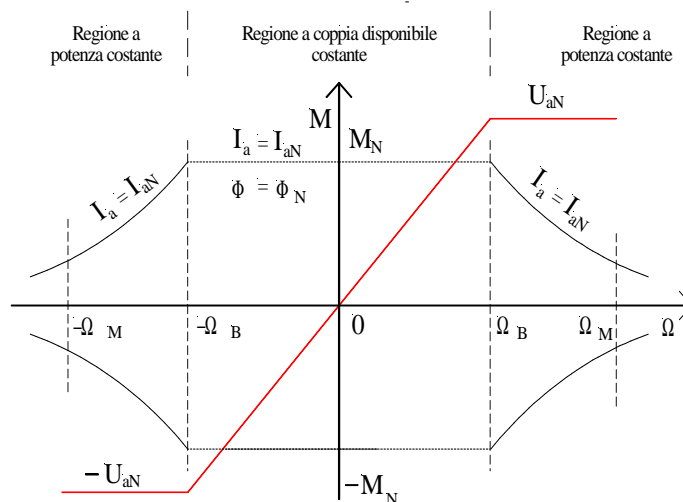


Fig.1.3.2 - Regioni di funzionamento del motore c.c

Per velocità (in valore assoluto) superiori alla velocità base il motore lavorerà invece con il più alto valore di flusso ammesso dalla (1.3.3) e quindi con un flusso inversamente proporzionale alla velocità e tale da produrre a tutte le velocità una tensione ai morsetti della macchina costante e pari

al valore nominale. La coppia disponibile, ottenibile sempre con corrente nominale, è in questo caso decrescente con la velocità come il flusso.

Data l'ipotesi di assenza di perdite sugli avvolgimenti, la potenza meccanica disponibile, data dal prodotto della coppia disponibile per la velocità, è costante e pari alla potenza elettrica disponibile $I_{aN}U_{aN}$, come è immediato verificare.

La regione di funzionamento con velocità superiori alla velocità base prende per questo il nome di regione a *potenza limite (o disponibile) costante, o a flusso decrescente (deflussaggio)*. Essa si estende teoricamente fino a velocità infinita, ma in pratica sarà impiegabile fino ad una certa velocità massima Ω_M , compatibile con gli sforzi centrifughi che il rotore riesce a sopportare e con la capacità del sistema spazzole-collettore di commutare la corrente (cfr. par. 1.2). Con riferimento a quest'ultimo aspetto può rendersi necessario ridurre il limite di corrente al di sotto della corrente nominale per le velocità più elevate. Normalmente si ha $\Omega_M = (2\div 6) \Omega_B$.

La collocazione del punto di funzionamento all'interno della regione a coppia disponibile costante o in quella a potenza disponibile costante dipende, per un dato carico meccanico, dalle condizioni di alimentazione dell'armatura e del circuito di campo. Dalle considerazioni prima esposte si evince che il funzionamento nella regione a coppia disponibile costante è governato avendo sull'alimentazione di armatura, mentre il circuito di campo è attraversato dalla sua corrente nominale e produce il flusso induttore nominale, oppure la macchina è a magneti permanenti. Nella regione in esame si attua pertanto il cosiddetto *controllo di armatura*. Nella regione a potenza disponibile costante invece il flusso induttore va aggiustato al variare della velocità (*controllo di campo*) e, per ogni valore di esso, si aggiusta la corrente di armatura per ottenere la desiderata coppia. In tale regione si attuerà pertanto il cosiddetto *controllo combinato di campo e di armatura*.

1.4 Caratteristiche meccaniche

Le *caratteristiche meccaniche* $M=M(\Omega)$ forniscono la coppia sviluppata in funzione della velocità di rotazione per il funzionamento a regime in diverse condizioni di alimentazione. Esse consentono in particolare di evidenziare i comportamenti peculiari del motore a corrente continua e di individuare le grandezze su cui si può agire per controllarne la coppia o la velocità nel rispetto dei limiti esposti nel precedente paragrafo.

Il comportamento a regime si può analizzare risolvendo le equazioni del par.1.1 dopo aver posto a zero ogni derivata. Si ottiene allora

$$U_a = R_a I_a + K_e \Phi \Omega \quad \text{ove} \quad K_e \Phi \Omega = E_a \quad (1.4.1)$$

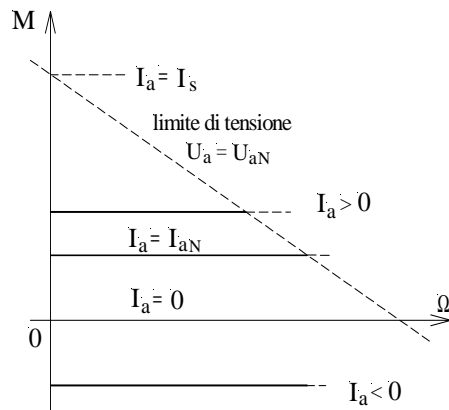
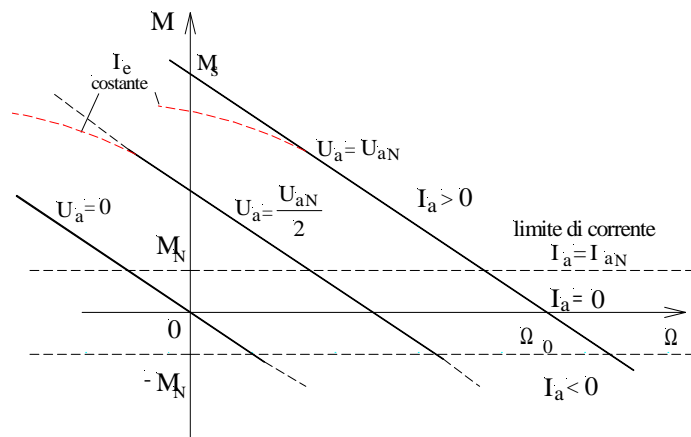
$$M = K_e \Phi I_a \quad (1.4.2)$$

$$U_e = R_e I_e \quad (1.4.3)$$

$$\Phi = \Phi(I_e) \quad (1.4.4)$$

1.4.1 Caratteristiche meccaniche a flusso induttore costante in motori alimentati a corrente d'armatura impressa

Si consideri dapprima il caso in cui un appropriato controllo di corrente consenta di regolare la corrente d'armatura I_a su un desiderato valore, mentre il flusso induttore è mantenuto in ogni caso costante. In questo caso si parla di motore a corrente d'armatura impressa, essendo quest'ultima la grandezza imposta mentre la tensione sarà aggiustata automaticamente per avere la corrente desiderata ad ogni velocità di lavoro.


 Fig.1.4.1 - Caratteristiche meccaniche $M=M(\Omega)$ con corrente I_a impressa

 Fig.1.4.2: Caratteristiche meccaniche $M=M(\Omega)$ con tensione U_a impressa

Facendo ancora riferimento alla (1.4.2), si evince che la coppia del motore a corrente impressa risulta indipendente dalla velocità e le caratteristiche meccaniche formano pertanto una famiglia di rette parallele all'asse delle Ω , come evidenziato in Fig.1.4.1. Ogni caratteristica termina nel punto in cui, crescendo la velocità, la tensione raggiunge il suo valore nominale. Questa velocità può essere valutata dalla (1.4.1) ponendo appunto in essa $U_a = \pm U_{aN}$. Il luogo dei punti limite è rappresentato a tratteggio in Fig. 1.4.1 disegnata per valori positivi della velocità.

1.4.2 Caratteristiche meccaniche a flusso induttore costante in motori alimentati a tensione d'armatura impressa

Si analizza ora il caso a tensione d'armatura impressa. Dalla (1.4.1) si ricava:

$$I_a = \frac{U_a - K_e \Phi \Omega}{R_a} \quad (1.4.5)$$

Sostituendo nella (1.4.2) si ha:

$$M = K_e \Phi \frac{U_a - K_e \Phi \Omega}{R_a} \quad (1.4.6)$$

che è l'espressione cercata. Sotto la condizione di flusso costante essa rappresenta una retta (Fig.1.4.2) con intersezioni degli assi date da:

$$M_s = K_e \Phi \frac{U_a}{R_a} = K_e \Phi I_s \quad (1.4.7)$$

$$\Omega_0 = \frac{U_a}{K_e \Phi} \quad (1.4.8)$$

ove con I_s si è indicata la *corrente di spunto*, il cui valore per $U_a = U_{aN}$ è da 5 a 20 volte la I_{aN} .

La coppia M_s prende il nome di *coppia di spunto* (alla tensione U_a), mentre Ω_0 è la *velocità a vuoto*, ovvero la velocità alla quale ruota il motore in assenza di coppia meccanica resistente.

Si noti che il rapporto tra la corrente di spunto M_s (ed anche la corrente di spunto) e la velocità a vuoto Ω_0 vale:

$$\frac{M_s}{\Omega_0} = \frac{(K_e \Phi)^2}{R_a} \quad (1.4.9)$$

ed è indipendente da U_a .

La caratteristica meccanica di Fig.1.4.2 è ottenuta supponendo di mantenere costante il flusso induttore. Essa coincide in buona parte con quella che si disegna pensando di mantenere costante la corrente di eccitazione I_e . Per alte coppie, e dunque elevate correnti di armatura, a causa della reazione d'indotto il flusso viene progressivamente a ridursi, dando luogo ad una perdita di coppia come evidenziato con il tratteggio in Fig.1.4.2.

Le figure sopra illustrate mostrano che agendo sulla corrente o sulla tensione di armatura (*controllo di armatura*), mentre il flusso induttore rimane costante, si modificano le caratteristiche meccaniche e ciò consente di far funzionare il motore a diverse coppia sviluppata e velocità di lavoro.

1.4.5 Il controllo di armatura.

Le strategie del controllo di armatura sono in genere distinte in *controllo di armatura a corrente impressa* e *controllo di armatura a tensione impressa*.

Al variare della corrente di armatura I_a (*controllo di armatura a corrente impressa*) le caratteristiche meccaniche traslano parallelamente a se stesse, restando rette parallele all'asse delle velocità, come mostra la Fig.1.4.1. Il fascio delle caratteristiche sarà limitato superiormente e inferiormente da quelle associate alla corrente nominale $\pm I_{aN}$, alle quali corrisponde la coppia nominale rispettivamente positiva e negativa.

Si noti che nel controllo di corrente deve essere osservato il limite di tensione d'armatura $|U_a| \leq U_{aN}$, per cui il funzionamento è possibile solo nella regione compresa tra gli assi cartesiani e le rette che derivano dalla (1.4.1) sostituendo a U_a i valori $\pm U_{aN}$ (una tratteggiata in Fig.1.4.1). Tale limite coincide con la caratteristica meccanica a tensione impressa tracciata per la tensione nominale e la sua intersezione con l'asse della velocità individua la *velocità base*⁵ dell'azionamento.

Se invece si regola solo U_a (*controllo di armatura a tensione impressa*, non varia la pendenza della caratteristica elettromeccanica, data dalla (1.4.9), ma variano le intercette proporzionalmente ad U_a . Si ottiene allora quanto riportato in Fig.1.4.2. Anche in questo caso esistono un limite superiore ed uno inferiore a ciascuna caratteristica corrispondenti ai punti di lavoro con corrente in valore assoluto pari alla corrente nominale del motore. Tali limiti coincidono con le caratteristiche meccaniche a corrente impressa tracciate per la corrente uguale e quindi opposta alla nominale e la loro intersezione con l'asse della coppia individua la *coppia nominale* dell'azionamento.

1.4.4 Caratteristiche meccaniche a tensione d'armatura costante e regolazione di flusso

Un'altra possibilità di controllo consiste nell'agire sulla tensione U_e (*controllo di campo*) ossia nel variare il flusso Φ .

In condizioni di tensione d'armatura costante e pari al valore nominale, le espressioni (1.4.7) e (1.4.8) mostrano che variando Φ , la coppia di spunto M_s varia come Φ mentre la velocità a vuoto

⁵ La *velocità base* coincide con la *velocità a vuoto* alla tensione di armatura nominale.

Ω_0 varia come il suo reciproco. Al variare di Φ , si ha cioè una rotazione delle caratteristiche meccaniche, attorno al punto P; la Fig.1.4.3 mostra le caratteristiche relative a due valori di flusso Φ e $\Phi-d\Phi$ arbitrariamente vicini tra loro.

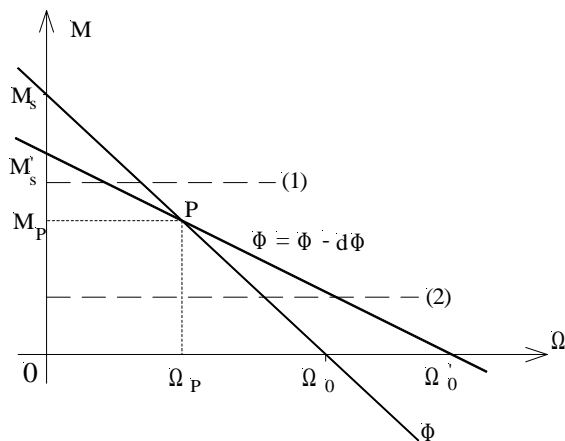


Fig.1.4.3: Caratteristica meccanica nella regolazione di campo

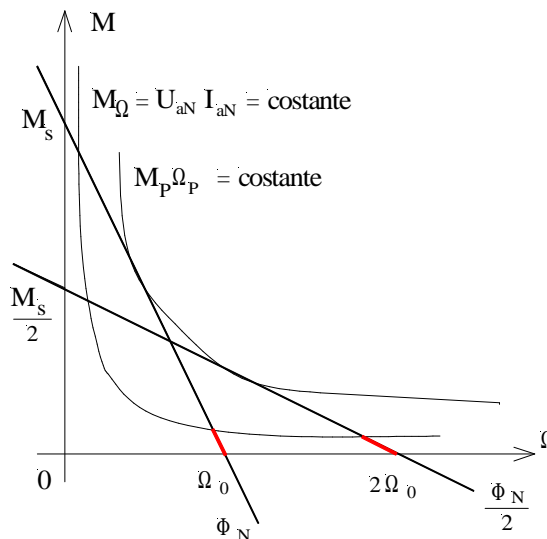


Fig.1.4.4: Rotazione delle caratteristiche meccaniche e limite di funzionamento

E' importante notare che per velocità minori di Ω_p la coppia si riduce al diminuire di Φ mentre al di sopra di Ω_p essa cresce. Con una caratteristica di carico come la (1) di Fig.1.4.3 in corrispondenza ad una diminuzione di flusso si ha allora una riduzione di velocità, mentre con una caratteristica come la (2) si ha un aumento di velocità. Spesso si desidera mantenere un comportamento analogo a quello del funzionamento a vuoto (retta $M=0$), per cui si richiede un aumento di velocità al calare del flusso ed è quindi necessario richiedere al motore coppie inferiori a quella relativa al punto P di rotazione delle caratteristiche meccaniche per ogni valore di Φ .

Le coordinate del punto P di rotazione possono essere ottenute calcolando la derivata della coppia M rispetto a Φ , determinando poi il valore $\Omega=\Omega_p$ che annulla tale derivata. Si ha:

$$\frac{dM}{d\Phi} = \frac{K_e U_a}{R_a} - \frac{2K_e^2 \Phi}{R_a} \Omega \tag{1.4.8}$$

che si annulla per

$$\Omega_p = \frac{U_a}{2K_e \Phi} = \frac{\Omega_0}{2} \tag{1.4.9}$$

In corrispondenza si ha

$$M_p = K_e \Phi \frac{U_a - K_e \Phi \Omega_p}{R_a} = K_e \Phi \frac{U_a}{2R_a} = K_e \Phi \frac{I_s}{2} = \frac{M_s}{2} \tag{1.4.10}$$

e la potenza erogata nel punto P vale

$$M_p \Omega_p = \frac{U_a^2}{4R_a} \quad (1.4.11)$$

costante e pari alla metà di quella assorbita in quella condizione operativa.

Se si considera un azionamento a tensione d'armatura impressa e costante, il luogo tracciato sul piano Ω - M dal punto P di rotazione al variare del flusso Φ è dunque una iperbole, come mostrato in Fig.1.4.4.

La corrente assorbita nel punto P , si ricava dalla (1.4.1) e vale

$$I_a(\Omega_p) = \frac{U_a}{2R_a} = \frac{I_s}{2} \quad (1.4.12)$$

Per una tensione d'armatura pari al valore nominale, $I_a(\Omega_p)$ è solitamente maggiore della corrente nominale del motore; in genere, quindi, si opera con coppie inferiori a M_p , limitate da $I_a \leq I_{aN}$. Il limite di tensione e corrente nel piano (Ω - M) è dato da un'iperbole espressa dall'equazione $P=U_{aN}I_{aN}=\text{costante}$, come riportato in Fig.1.4.4.

Minore è il flusso Φ , maggiore è la velocità e minore è la coppia disponibile. Vi è tuttavia un limite inferiore di Φ , legato al fenomeno della commutazione.

Minore è Φ , maggiore è la distorsione di campo al traferro (anche per la ridotta saturazione del circuito magnetico) dovuta alla reazione di indotto che rimane di intensità inalterata. Ciò complica la commutazione, tenendo anche conto che la velocità è elevata. Siccome la reazione di indotto tende a far diminuire il flusso induttore, si può manifestare una instabilità a cui si fa fronte sempre con gli avvolgimenti compensatori ed eventualmente con una eccitazione di tipo serie.

1.4.5 Controllo combinato di armatura e di campo

Il controllo di armatura e quello di campo sono spesso eseguiti in modo combinato negli azionamenti in c.c. Per le basse velocità si mantiene costante e massimo il flusso e si varia la corrente o la tensione di armatura. Valori positivi di corrente producono coppie positive mentre valori positivi di tensione si manifestano con velocità positive e viceversa.

In qualche caso si opera anche una *inversione del flusso* per invertire la velocità o la coppia; tale inversione va sempre effettuata ad armatura non alimentata, dato che in assenza di flusso la f.e.m. E_a si annulla e tutta la tensione d'alimentazione cadrebbe sulla resistenza d'armatura, provocando una corrente molto elevata.

Per individuare i segni delle tensioni e correnti per ottenere i desiderati versi di velocità e coppia si può far riferimento alla tabella seguente. Ove possibile non si fa l'inversione di campo, perché è associata ad una induttanza generalmente di valore elevato e quindi presenta una dinamica piuttosto lenta e si può fare solo a corrente di armatura nulla.

Tab.1.4.1 - Relazioni di segno tra grandezze elettriche e meccaniche

$U_a \approx E$	I_a	Φ	Ω	M
+	+	+	+	+
-	+	+	-	+
+	-	+	+	-
-	-	+	-	-
+	+	-	-	-
-	+	-	+	-
+	-	-	-	+
-	-	-	+	+

L'inversione di campo induce inoltre f.e.m. nell'avvolgimento di indotto, con possibili scariche fra le lamelle di collettore e sotto le spazzole, come si può facilmente comprendere ricordando il meccanismo di induzione di una f.e.m. di tipo trasformatore nella spira in commutazione affrontato nel par.1.2.

Un tipico esempio di carico adatto per la regolazione di campo è rappresentato dagli avvolgitori/svolgitori. Solitamente è richiesto che essi esercitino una forza F costante sul filo avvolto; l'espressione della coppia è pertanto legata al raggio r (in continua variazione) del rocchetto avvolto, $M = F r$ e ricordando che la velocità angolare ω e quella tangenziale v sono legate dalla relazione $\omega = v/r$ si deduce che il funzionamento richiesto è a potenza costante : $M\omega = Fv = \text{costante}$., legato direttamente alle due specifiche di progetto F e v .

Si noti come questo sia un esempio in cui l'applicazione richiede un funzionamento a potenza costante anche nella zona di funzionamento a coppia (disponibile) costante⁶; è importante non confondere i due concetti, il primo relativo ad una strategia di controllo, il secondo legato alle limitazioni dell'azionamento.

Tuttavia, le applicazioni che trovano maggiore diffusione sono quelle a coppia costante, richieste dai sistemi di sollevamento (gru, ascensori), dagli estrusori per materie plastiche e dalle macchine utensili con asportazione di truciolo.

Ventilatori e pompe centrifughe sono carichi che presentano una coppia proporzionale al quadrato della velocità, mentre le calandre per la carta e le materie plastiche hanno caratteristiche di carico con attrito viscoso e richiedono dunque una coppia che aumenta leggermente con la velocità.

Ventilatori e pompe centrifughe sono carichi che presentano una coppia proporzionale al quadrato della velocità, mentre le calandre per la carta e le materie plastiche hanno caratteristiche di carico con attrito viscoso e richiedono dunque una coppia che aumenta leggermente con la velocità.

1.5 - Comportamento dinamico del motore c.c. a tensione impressa e flusso induttore costante

Se il flusso è costante, le equazioni del motore (1.1.4), (1.1.5) e (1.1.9) risultano lineari e si può ricavare un modello matematico e a blocchi nel dominio di Laplace (variabile s). Le (1.1.5) e (1.1.9) portano a

$$U_a(s) = (R_a + sL_a)I_a(s) + K_e \Phi \Omega(s) \tag{1.5.1}$$

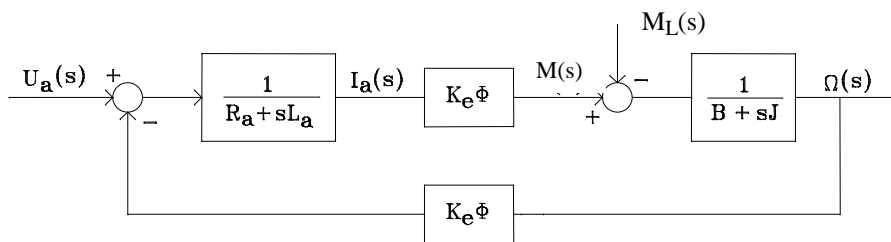


Fig.1.5.1: Schema a blocchi del motore c.c. a flusso costante

Assumendo poi che sia $m_L(\omega, t) = m_L(t) + B\omega$ e indicando con $M_L(s)$ la trasformata di Laplace della coppia di carico $m_L(t)$ le (1.1.4) e (1.1.10) diventano:

⁶ Questo è normalmente ottenuto con un opportuno controllo della corrente di armatura nella regione a coppia disponibile costante, facendo diminuire la corrente al crescere della velocità. L'esempio ha lo scopo di evidenziare come il controllo in deflussaggio si adatti bene a carichi che hanno una coppia decrescente con la velocità.

$$K_e \Phi I_a(s) = M(s) = M_L(s) + (B + sJ)\Omega(s) \quad (1.5.2)$$

Lo schema a blocchi che descrive le (1.5.1) e (1.5.2) è riportato in Fig.1.5.1.

Per caratterizzare il comportamento dinamico del motore c.c., assunto come ingresso (comando) la tensione U_a , come disturbo la coppia di carico M_L e come uscite la velocità Ω e la corrente I_a , si possono ricavare le *funzioni di trasferimento* che legano le uscite di interesse all'ingresso e al disturbo.

Nell'ordine esse risultano:

$$\Gamma_{u\omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{\frac{1}{R_a + sL_a} K_e \Phi \frac{1}{B + sJ}}{1 + \frac{1}{R_a + sL_a} (K_e \Phi)^2 \frac{1}{B + sJ}} = \frac{1}{K_e \Phi} \frac{1}{D(s)} \quad (1.5.3)$$

$$Y_a(s) = \frac{I_a(s)}{U_a(s)} = \frac{\frac{1}{R_a + sL_a}}{1 + \frac{1}{R_a + sL_a} (K_e \Phi)^2 \frac{1}{B + sJ}} = \frac{1}{(K_e \Phi)^2} \frac{B + sJ}{D(s)} \quad (1.5.4)$$

$$G_{m\omega}(s) = \frac{\Omega(s)}{M_L(s)} = -\frac{\frac{1}{B + sJ}}{1 + \frac{1}{R_a + sL_a} (K_e \Phi)^2 \frac{1}{B + sJ}} = -\frac{1}{(K_e \Phi)^2} \frac{R_a + sL_a}{D(s)} \quad (1.5.5)$$

$$\Gamma_{mi}(s) = \frac{I_a(s)}{M_L(s)} = \frac{\frac{1}{R_a + sL_a} K_e \Phi \frac{1}{B + sJ}}{1 + \frac{1}{R_a + sL_a} (K_e \Phi)^2 \frac{1}{B + sJ}} = \frac{1}{K_e \Phi} \frac{1}{D(s)} = \Gamma_{u\omega}(s) \quad (1.5.6)$$

ove si è posto

$$D(s) = \frac{JL_a}{(K_e \Phi)^2} s^2 + \frac{(R_a J + L_a B)}{(K_e \Phi)^2} s + \frac{R_a B}{(K_e \Phi)^2} + 1 \quad (1.5.7)$$

che può essere riscritto nella forma

$$D(s) = s^2 \tau_a \tau_{m1} + s \tau_{m1} \left(1 + \frac{\tau_a}{\tau_m} \right) + \left(1 + \frac{\tau_{m1}}{\tau_m} \right) = \left(1 + \frac{R_a B}{(K_e \Phi)^2} \right) \left(1 - \frac{s}{p_1} \right) \left(1 - \frac{s}{p_2} \right) \quad (1.5.8)$$

in cui p_1 e p_2 sono le radici di $D(s) = 0$ (poli delle funzioni di trasferimento (1.5.3)-(1.5.6)) e si è posto

$$\tau_a = L_a/R_a \quad (\text{costante di tempo elettrica del circuito d'armatura}) \quad (1.5.9)$$

$$\tau_m = J/B \quad (\text{costante di tempo meccanica}) \quad (1.5.10)$$

$$\tau_{m1} = JR_a/(K_e\Phi)^2 \quad (\text{costante di tempo elettromeccanica}) \quad (1.5.11)$$

Molto spesso nella pratica sono verificate due condizioni, di seguito illustrate, che permettono una scrittura semplificata della (1.5.8).

- a) $\tau_a \ll \tau_m$; la costante di tempo elettrica è solitamente molto minore di quella meccanica, che equivale a dire $L_a B \ll JR_a$. Ciò trova dimostrazione dall'osservazione diretta che il transitorio di estinzione di una corrente in un circuito R_a - L_a messo in corto circuito (transitorio governato dalla costante di tempo τ_a) è assai più rapido del transitorio di estinzione della velocità di un carico meccanico con parametri B-J in evoluzione libera (transitorio governato dalla costante di tempo τ_m).
- b) $\tau_{m1} \ll \tau_m$; se si sostituiscono le definizioni (1.5.10) e (1.5.11), questa disequaglianza equivale a supporre $R_a B \ll (K_e\Phi)^2$. Indicando infatti con $U_{Ra} = R_a I_{aN}$ la caduta di tensione sulla resistenza d'armatura prodotta dalla corrente nominale, con $M_B = B\Omega_N$ la coppia d'attrito viscoso alla velocità nominale e con E_{aN} ed I_{aN} rispettivamente la f.e.m. e la corrente nominali, si può scrivere:

$$R_a B = \frac{1}{\Omega_N I_{aN}} (R_a I_{aN})(B\Omega_N) = \frac{1}{\Omega_N I_{aN}} U_{Ra} M_B \quad (1.5.12)$$

ed invece

$$(K_e\Phi)^2 = \frac{1}{\Omega_N I_{aN}} (K_e\Phi\Omega_N)(K_e\Phi I_N) = \frac{1}{\Omega_N I_{aN}} E_{aN} M_N \quad (1.5.13)$$

e dato che $U_{Ra} \ll E_N$ e che $M_B \ll M_N$ vale anche $U_{Ra} M_B \ll E_N M_N$ e l'approssimazione b) risulta legittimata⁷.

Si osserva che le condizioni a) e b) sopra esposte equivalgono a porre $B=0$ in $D(s)$ e cioè provano che i poli delle funzioni di trasferimento in esame sono poco influenzati dal valore di B e per il loro calcolo si può considerare il carico meccanico di natura puramente inerziale.

Se dunque si possono ritenere valide le approssimazioni a) e b), la (1.5.8) diventa:

$$D(s) = s^2 \tau_a \tau_{m1} + s \tau_{m1} + 1 = \left(1 - \frac{s}{p_1}\right) \left(1 - \frac{s}{p_2}\right) \quad (1.5.14)$$

Le radici del *polinomio caratteristico* (1.5.14) in questo caso sono:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2\tau_a} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\tau_a}{\tau_{m1}}} \right) \quad (1.5.15)$$

Per quanto riguarda τ_{m1} e τ_a , si può verificare in pratica uno qualsiasi dei seguenti tre casi possibili.

⁷ Occorre prestare attenzione che in presenza di carichi con rilevanti coefficienti di attrito viscoso (per esempio ventilatori) occorre effettuare una verifica per non incorrere in grossolani errori di approssimazione.

Caso 1) Vale $\tau_{m1}=4\tau_a$ e il discriminante si annulla nella (1.5.15); in tal caso le radici calcolate nella (1.5.15) sono reali e coincidenti e valgono:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\tau_a} \quad (1.5.16)$$

Caso 2) Valori maggiori del momento di inerzia o minori del flusso comportano $\tau_{m1} > 4\tau_a$, e portano dunque a radici reali e distinte, perché il discriminante rimane in tali casi positivo.

Se poi, come spesso accade, $\tau_{m1} \gg 4\tau_a$, allora con buona approssimazione vale:

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_a} \quad \text{e} \quad p_2 = -\frac{(K_e \Phi)^2}{JR_a} = -\frac{1}{\tau_{m1}} \quad (1.5.15)$$

in quanto la radice del discriminante nella (1.5.15) può in tal caso essere approssimata in serie di Mac Laurin troncata al primo ordine⁸.

Caso 3) Se, al contrario, il momento di inerzia è piccolo, tale per cui $\tau_{m1} < 4\tau_a$, le radici sono complesse coniugate e si ha:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\tau_a} \left(-1 \pm j \sqrt{\frac{4\tau_a}{\tau_{m1}} - 1} \right) \quad (1.5.16)$$

Il luogo delle radici al variare di J/Φ^2 (che sono i parametri che dipendono dalle condizioni di carico e di eccitazione) è riportato in Fig.1.5.2.

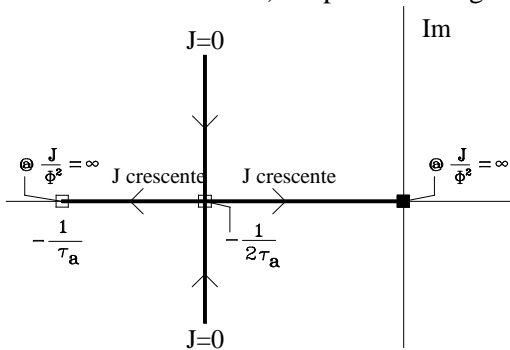


Fig.1.5.2: Luogo delle radici di $D(s)$ al variare di J/Φ^2

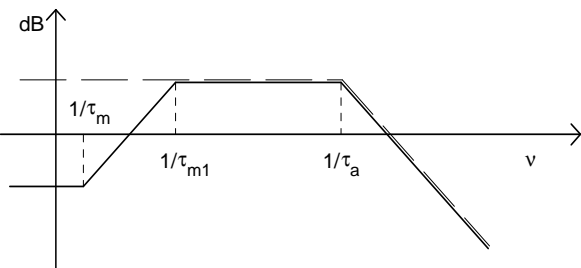


Fig.1.5.3: Risposta in frequenza dell'ampiezza di $Y_a(jv)$

Le due funzioni di trasferimento identiche $\Gamma_{u\omega}(s)$ e $\Gamma_{mi}(s)$ hanno un numeratore unitario e quindi lo studio del denominatore $D(s)$ esaurisce l'analisi delle loro caratteristiche dinamiche. Oltre ai due poli p_1 e p_2 le due funzioni di trasferimento non possiedono zeri.

La funzione di trasferimento $Y_a(s)$ invece possiede uno zero che è la radice del suo numeratore polinomiale di ordine uno. Si riconosce che tale zero è pari all'inverso del reciproco della costante

⁸ La serie di Mac Laurin per la generica funzione $f(x)$ si esprime come $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. In

particolare, $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$

di tempo meccanica: $z_1 = -1/\tau_m$, reale negativo e di valore assoluto molto piccolo se riportato sulla Fig. 1.5.2.

Può essere di interesse il comportamento in frequenza della $Y_a(s)$, cioè lo studio di $Y_a(jv)$ al variare di v (diagrammi di Bode) per il caso, in pratica frequente, in cui i poli sono dati dalle (1.5.15). La risposta in frequenza dell'ampiezza è riportata schematicamente in Fig. 1.5.3; è facile verificare che la sua approssimazione per le alte frequenze (risposta a tratteggio), cioè al di sopra di $v = 1/\tau_{m1}$, è data da

$$Y_a(jv) = \frac{1}{R_a + jvL_a} \quad (v > 1/\tau_{m1}) \quad (1.5.17)$$

che corrisponde alla funzione di trasferimento del solo circuito di armatura.

Anche la funzione di trasferimento $G_{m\omega}(s)$ presenta uno zero a numeratore legato questa volta alla costante di tempo elettrica di armatura.

Nelle stesse condizioni di validità delle (1.5.15), si ha la cancellazione dello zero, per cui la $G_{m\omega}(s)$ diventa:

$$G_{m\omega}(s) = -\frac{R_a(1+s\tau_a)}{(K_e\Phi)^2} \frac{1}{(1+s\tau_a)(1+s\tau_{m1})} = -\frac{1}{J} \frac{\tau_{m1}}{(1+s\tau_{m1})} \quad (1.5.18)$$

che è una funzione del primo ordine. La risposta della velocità ad un disturbo di coppia a gradino mentre la tensione di armatura e il flusso sono tenuti costanti seguirà pertanto una curva esponenziale con costante di tempo τ_{m1} . La (1.5.18) mette anche in evidenza come il guadagno $G_{m\omega}(s)$ cresca al diminuire del flusso e quindi si avranno variazioni di velocità a parità di disturbo di coppia tanto più grandi quanto minore è il flusso.